Algèbre linéaire – Polynômes

Exercice 1:
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
1) Soit f et g deux endomorphismes de E. montrer que $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Im}\ g$ si et seulement si il existe un endomorphisme h tel que $f = g \circ h$.
2) Soit f et g deux endomorphismes de E. on considère les trois propositions :

1. $f = f \circ g \circ f$
2. $g = g \circ f \circ g$
3. $\mathrm{rg}\ f = \mathrm{rg}\ g$

Montrer que deux quelconques d'entre elles impliquent la troisième.
3) Montrer que pour tout endomorphisme f il existe un endomorphisme g tel que (f, g) vérifie les trois propriétés précédentes.

Exercice 2:
1) U_6 est-il isomorphe à S_3.
2) Pour quelle valeurs de p U_6 est-il isomorphe à un sous-groupe de S_p.
3) On note π_n l'ensemble des générateurs de U_n. Déterminer π_6 et π_{12}.
On note $\Phi_n = \prod_{z\in\pi_n}(X - z)$
4) Exprimer Φ_p si p est premier..
5) Montrer que

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$$

Exercice 3:
Soit E un espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soit H et K deux sous espaces vectoriels de E.
1) Condition nécessaire et suffisante sur H et K pour qu'il existe f dans $L(E)$ tel que $\mathrm{Im}\ f = H$ et $\mathrm{Ker}\ f = K$?
2) Cette condition étant supposée vérifiée, soit

$$G = \{f \in L(E); \mathrm{Im}\ f = H \ \ \mathrm{Ker}\ f = K\}$$

Montrer que G est un groupe pour la composition si et seulement si $H \oplus K = E$.

Exercice 4:
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit la matrice $A = (a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ par

$$a_{i,j} = \sum_{\{k, k|i \text{ et } k|j\}} f(k).$$

1) Calculer $\det(A)$.
On pourra pour cela s'aider de la matrice $C = \mathrm{diag}(f(1), \dots, f(n))$ et $B = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = 1$ si $i|j$ et 0 sinon. On pourra alors calculer ${}^tBCB$.
2) Calculer $\det(A)$ dans les différents cas suivants :

- $a_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à i et j.
- $a_{i,j}$ est la somme des diviseurs communs à i et j.
- $a_{i,j} = \mathrm{pgcd}(i, j)$. Rappeler d'abord la définition de l'indicatrice d'Euler, ses propriétés élémentaires et surtout son mode de calcul. Conclure.

Exercice 5: On cherche les entiers n tels qu'il existe un polynôme P et un réel $\lambda > 0$ avec

$$P(X)^2 - X(X + 1)(X + 2)\cdots(X + 2n - 1) = \lambda^2.$$

1) Etudier les cas $n = 1$ et $n = 2$. On suppose maintenant $n \geq 3$. On considère un éventuel couple solution (P, λ), avec $P(0) = \lambda$.
2) Que dire des racines de $P + \lambda$ et $P - \lambda$.
3) Montrer que si a et b sont deux racines successives de $P - \lambda$ alors $b = a + 1$ ou $b = a + 3$.
4) On range les racines de $P - \lambda$ dans l'ordre décroissant :

$$0 = a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$$

Montrer que $a_1 = -3$ et $a_2 = -4$ puis conclure.