Intégration

Exercice 1:
1) Montrer que l'ensemble E des fonctions continues sur l'intervalle I à valeurs réelles dont le carré est intégrable est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et que l'application $(f,g)\mapsto \int_I fg$ définit un produit scalaire. Exprimer ce que devient l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cadre.
2) Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables. Montrer que $(f')^2$ est intégrable et que f tend vers 0 en $\pm\infty$. Etablir aussi

$$\int_{\mathbb{R}}(f')^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}}(f'')^2\right).$$

Exercice 2: Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.

Exercice 3:
1) Calculer

$$l=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n\ln(1+u^n)\,du.$$

2) Déterminer un équivalent de $l-\displaystyle\int_0^1 n\ln(1+u^n)\,du$.

Exercice 4: Montrer que $f: x\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et donner la valeur de son intégrale sous la forme de la somme d'une série.

Exercice 5:
1) Soit $f\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin nt\,dt.$$

2) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin nt}{e^t-1}\,dt.$$

Exercice 6: On pose

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n}dx$$

1) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2) Ecrire I_n comme la somme d'une série.
3) En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 7:
1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, ne tendant pas vers 0 en $+\infty$. Montrer que quitte à remplacer f par $-f$, il existe un $\epsilon>0$ et une suite $(x_n)_{n\to+\infty}$ tels que $\forall n f(x_n)>\epsilon$.
2) En déduire qu'il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ et une suite $(z_n)_{n\geq 0}$ avec $y_n\leq x_n\leq z_n$ pour tout n et

$$\int_{y_n}^{x_n} f(t)\,dt\geq (x_n-y_n)\frac{\epsilon}{2},\quad \int_{x_n}^{z_n} f(t)\,dt\geq (z_n-x_n)\frac{\epsilon}{2}.$$

3) En déduire que si on peut trouver une telle suite $(y_n)_{n\geq 0}$ (ou $(z_n)_{n\geq 0}$) telle que $(x_n-y_n)_{n\geq 0}$ (ou $(z_n-x_n)_{n\geq 0}$) ne tende pas vers 0 alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

4) En déduire que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors f tend vers 0 en $+\infty$ dans chacun des cas suivanst :
- f est lipchitzienne (posé à un de vos camarades en colle),
- f est uniformément continue (posée à votre serviteur à l'entrée à l'ENS),
- $(f')^2$ est intégrable (à mode à l'X dans les années 90),
- f' est majorée ou est minorée (exercice d'oral ENS récent, posé à un élève de la 931 en colle),
- $f'\leq a+bf^2$, a et b positifs (suite de l'exercice précédent),
- f'' est bornée (création).