# Suites et séries de fonctions

**Exercice 1:** Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec :

$$f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

**Exercice 2:** Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx - \frac{1}{n} \text{ si } x \in [0,\frac{1}{n}],\ f_n(x) = 1-x \text{ si } x \in [\frac{1}{n},1]$$

*Indication :* Faire un dessin.

**Exercice 3:** Pour $n \geq 1$ on définit la fonction $u_n$ par $u_n(0) = 0$, $u_n(t) = \frac{1}{n} t^n \ln t$ si $t \neq 0$.
1) Montrer que pour tout $x$ de $[0,1[$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

la convergence étant uniforme sur tout segment $[0,t]$, $t \in [0,1[$.
2) En déduire que pour tout $t$ de $[0,1[$ : $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$.
3) Etudier les différents types de convergence de la série de fonction $\sum_{n\geq 1} u_n$.
4) Calculer $I_p = \int_0^1 t^p \ln t\,dt$ pour $p \geq 1$.
5) En déduire l'expression de $\int_0^1 (\ln t)(\ln(1-t))\,dt$ sous la forme de la somme d'une série.
6) Calculer la somme de cette série. (On pourra utiliser $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).
*Indication :* Décomposer en éléments simples et faire apparaître une somme télescopique.

**Exercice 4:**
1) Etudier la convergence simple sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$f_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,1]\ f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,dt.$$

*Indication :* Montrer que $f_n : x \mapsto a_n x^{\alpha_n}$ et étudier les suites $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, puis $(a_n)_{n\geq 0}$.
2) La convergence est-elle uniforme ?

**Exercice 5:** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.
1) Montrer que $f$ est définie sur $I = ]-1,1[$.
2) Montrer que $f$ est continue sur $I$.
3) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.
4) Montrer que $f$ est développable en série entière (c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x$ de $I$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$) en utilisant le théorème sur la permutation des sommations.
*Indication :* Ecrire $\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}}$ et utiliser le développement de $\frac{1}{1-u}$ sous la forme d'une série entière.