Espaces vectoriels normés

Exercice 1: *D'après X-ENS MP* 2018*, épreuve A, préliminaire*
Pour tous entiers l, m dans $\mathbb{N}^*$, on notera $M_{l,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant l lignes et m colonnes. Lorsque $l = m$, on notera $M_l(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $l \times l$. Par ailleurs

- Pour tout matrice A de $M_{l,m}(\mathbb{R})$, on notera A^T la transposée de A
- Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ on munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique et pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^p$ on notera $\|x\|_2$ la norme euclidienne de x.
- Pour tout A et B de $M_{l,m}(\mathbb{R})$, on notera $< A, B >= \operatorname{tr}(A^T B)$.

Soit n, p, q dans $\mathbb{N}^*$ trois entiers strictement positifs. Soit A, B dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et C dans $M_{p,q}(\mathbb{R})$.
1) Exprimer $< A, B >$ en fonctions des coefficients de A et B.
2) Montrer que $(A, B) \mapsto < A, B >$ définit un produit scalaire sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$ (*ce résultat était admis dans l'épreuve*). On note $A \mapsto \|A\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
3) Soit u dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que $\|Au\|_2 \leq \|A\| \, \|u\|_2$.
4) En déduire $\|AC\| \leq \|A\| \, \|C\|$.
(*A noter que cette dernière question a aussi été posée en début de problème au Mines-Ponts en* 2018 *et à Centrale-Supélec MP, en* 2014.)

Exercice 2: Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée de réels ou complexes, admettant une unique valeur d'adhérence. Montrer qu'elle est convergente.

Exercice 3: Soit (x_n) une suite bornée réelle et L l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Que dire de la suite $(d(x_n, L))$?

Exercice 4:
1) Montrer que l'application

$$M \mapsto \|M\| = \sup\{\|MX\|; \|X\| = 1\} \text{ où } \|X\| \text{ est une norme quelconque sur } \mathbb{R}^n$$

est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$. On pourra admettre qu'il existe une constante k positive telle que pour tout X de $\mathbb{R}^n$: $\|MX\| \leq k\|X\|$ et identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices à n lignes et une colonne .
2) Justifier l'existence de cette constante k lorsque $\|x\| = \sup |x_i|$ et lorsque $\|x\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5: *(ENSAE 2003, épreuve spécifique* Partie I). Soient p et q des réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
1) Soient x et y deux réels positifs. Montrer $xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$.
2) Soient $(a_1, \ldots, a_N)$ et $(b_1, \ldots, b_N)$ des réels, montrer que :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On pourra d'abord envisager le cas où $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p = 1 = \sum_{n=1}^{N} |b_n|^q$.
3) En déduire que pour tout réels $(a_1, \ldots, a_N)$:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right|; \sum_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1\right\}.$$

4) Soient $(a_1, \ldots, a_N)$ et $(b_1, \ldots, b_N)$ des réels, montrer que :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Indication : Utilisez la question précédente.
5) (Hors-sujet) On pose

$$N_p(a_1, \ldots, a_N) = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que N_p est une norme sur $\mathbb{R}^N$. Déterminer la limite de $N_p(a_1, \ldots, a_N)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 6: Soit $P=(p_{ij})\in M_p(\mathbb{R})$ telle que $\forall i,j\ p_{i,j}\geq 0$ et $\forall i\ \sum_j p_{i,j}=1$. On note $P^n=(p_{i,j}^{(n)})$ (puissance n-ième de P)

1) Montrer que $\forall i,j,n\ p_{i,j}^{(n)}\geq 0$ et $\forall i,n\ \sum_j p_{i,j}^{(n)}=1$.

2) On suppose qu'il existe n_0 tel que $\min_{i,j} p_{i,j}^{(n_0)}=\epsilon>0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} p_{i,j}^{(n)}=\Pi_j$$

(indépendant de i) avec $\Pi_j>0$ et $\sum_j \Pi_j=1$.
Indication : introduire $m_j^{(n)}=\min_i p_{ij}^{(n)}$ ainsi $M_j^{(n)}=\max_i p_{ij}^{(n)}$. Montrer que ces deux suites sont monotones. Montrer que $\forall j,n\ m_j^{(n_0+n)}\geq m_j^{(n)}(1-\epsilon)+\epsilon M_j^{(n)}$ et conclure.

Exercice 7: *Le théorème de Hahn-Banach* Soit E un espace vectoriel, on appelle semi-norme sur E toute application p vérifiant les propriétés d'une norme, mais pas nécessairement $p(x)=0\Rightarrow x=0$.

1) Soit $E=\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et K un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que $\|\ \|_K : f\mapsto \sup_K |f(t)|$ est une semi-norme sur E.

On suppose maintenant que E est de dimension finie. On se donne un sous-espace F de E et une forme linéaire f définie sur F, et une semi-norme p définie sur E, telles que

$$\forall x\in F\quad |f(x)|\leq p(x).$$

2) Soit x_1 un élément de $E-F$, montrer que pour tout couple (x,y) d'éléments de F :

$$f(x)-p(x-x_1)\leq p(y+x_1)-f(y).$$

3) En déduire qu'il existe α dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout x de F et tout y de F :

$$f(x)-\alpha\leq p(x-x_1)\ \text{et}\ f(y)+\alpha\leq p(y+x_1).$$

4) On note $F_1=F+\mathbb{R}x_1$. Montrer que la forme linéaire f_1 définie sur F_1 par

$$f_1(x+tx_1)=f(x)+t\alpha$$

prolonge f à F_1, et vérifie

$$\forall z\in F_1\ |f_1(z)|\leq p(z).$$

5) Montrer qu'il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ définie sur E tout entier et telle que

$$\forall x\in E\ |\tilde{f}(x)|\leq p(x).$$

6) Montrer que le résultat précédent peut être étendu aux espaces E, réunion d'une suite croissante de sous-espaces de dimension finie (par exemple $\mathbb{R}[X]$).

Exercice 8: On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

1) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degrés distincts. Montrer que cette famille est libre.

2) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes dont l'ensemble des degrés recouvre $\mathbb{N}$. Prouver que cette famille est génératrice.

Il résulte des deux questions précédentes que si (P_n) est une suite de polynômes telle que pour tout n P_n soit de degré n alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. On se donne une telle famille. Tout polynôme Q s'écrit de manière unique $Q=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(Q)P_n$, les $a_n(Q)$ étant nuls pour n assez grand. On considère l'application

$$\phi : (Q,R)\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}a_n(Q)a_n(R).$$

3) Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

4) Que dire de la convergence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace normé associé.

5) Soit P un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$, en posant $P_i=X^i$ si $i\leq \deg P$ et $P_i=X^i-P$ pour $i>\deg P$, montrer qu'il existe une norme N_P sur $\mathbb{R}[X]$ telle que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P pour cette norme.