Exercice IV

IV.1

X est un variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{R}^+$ donc $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $0 \leq e^{-tX} \leq 1$ donc e^{-tX} possède une espérance.

Plus précisément

$$E(e^{-tX}) = \underline{\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) e^{-tx_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{-tx_n}}$$

$\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable de réels positifs ou nuls contenant $X(\Omega)$. Si $x_n \notin X(\Omega)$ $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$

$$\Phi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \qquad \text{avec } \forall n \in \mathbb{N} \ \forall t \in \mathbb{R} \ u_n(t) = p_n e^{-tx_n}$$

- $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n(t)| = u_n(t) \leq p_n$
- $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge (vers 1), donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$
- Chaque u_n est continue

Par conséquent Φ_X <u>est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$</u>

Montrons maintenant que Φ_X caractérise la loi de X.

<u>Première méthode</u> On montre que si $\Phi_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{-tx_n}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$ $p_n \geq 0$ et $\sum_{n \geq 0}^{+\infty} p_n = 1$ et $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^+$

alors $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$

Puisque $\left(\sum_{n \geq 0}^{+\infty} p_n\right) = 1$ on en déduit $\forall x \notin \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Φ_X caractérise donc bien la loi de X.

IV 2.

Posons simplement $\varphi = \Phi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

- Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ $u_n^{(k)}(t) = (-1)^k p_n x_n^k e^{-tx_n}$.
- L'étude de la fonction $x \mapsto x^k e^{-tx}$ permet de montrer facilement $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $0 \leq u_n^{(k)}(t) \leq \frac{k^k e^{-k}}{t^k} p_n$.

Soit $a > 0$ alors

$$\forall t \in [a, +\infty[\ \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n^{(k)}(t)| \leq \frac{k^k e^{-k}}{a^k} p_n = \alpha_{n,k}.$$

et $\sum_{n \geq 0} \alpha_{n,k}$ converge.

On en déduit que $\sum_{n \geq 0} u_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Il résulte de tout ceci que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}^{*+} \ \forall k \quad \Phi_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k p_n x_n^k e^{-tx_n}$$

En particulier la donnée de Φ_X détermine de manière unique la valeur des

$$\Phi_X^{(k)}(\lambda) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x_n^k e^{-\lambda x_n}.$$

Pour $\lambda > 0$ définissons de même.

$$\varphi_\lambda(t) = E\left(e^{-(\lambda + it)X}\right) \quad \text{pour } t \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$\varphi_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{p_n e^{-\lambda x_n} e^{-itx_n}}_{v_n(t)}.$$

- Chaque v_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
- $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}\ v_n^{(k)}(t) = (-i)^k p_n e^{-\lambda x_n} x_n^k e^{-itx_n}$.

$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}\quad |v_n^{(k)}(t)| \leq p_n \dfrac{e^{-k} k^k}{\lambda^k}$ (comme pour u_n)

* Donc $\sum_{n \geq 0} v_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ pour tout k.

Il résulte de ces trois points que φ_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec.

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}\quad \varphi_\lambda^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n (-i)^k e^{-\lambda x_n} x_n^k e^{-itx_n}$$

En particulier

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}\quad |\varphi_\lambda^{(k)}(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{-\lambda x_n} x_n^k$$
$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \frac{k^k e^{-k}}{\lambda^k}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}\quad |\varphi_\lambda^{(k)}(t)| \leq \frac{k^k e^{-k}}{\lambda^k}}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}\ \forall u \in \mathbb{R}\ |u| < \lambda\quad \forall N \in \mathbb{N}^*$

$$\left| \varphi_\lambda(t+u) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi_\lambda^{(k)}(t)}{k!} u^k \right| \leq \frac{N^N e^{-N}}{N!} \cdot \left(\frac{|u|}{\lambda}\right)^N$$

Or $\lim_{N \to +\infty} \dfrac{N^N e^{-N}}{N!} = \lim_{N \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi N}} = 0$ et $\lim_{N \to +\infty} \left(\dfrac{|u|}{\lambda}\right)^N = 0$

Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\ \forall u \in \mathbb{R}\ |u| < \lambda \quad \varphi_\lambda(t+u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi_\lambda^{(k)}(t)}{k!} u^k}$

La connaissance en t des $\varphi_\lambda^{(k)}(t)$ détermine **IV.4**

donc de manière unique les valeurs de φ_λ et donc de toutes ses dérivées sur $]-\lambda+t, t+\lambda[$.

On en déduit donc par récurrence sur n que la connaissance des $(\varphi_\lambda^{(n)}(0))_{n\geq 0}$ (qui découle de la connaissance de Φ_X) détermine de manière unique φ_λ sur $]-n\frac{\lambda}{2}, n\frac{\lambda}{2}[$, pour tout n, donc sur $\mathbb{R}$

On peut alors conclure.

$\forall T \in \mathbb{R}^{*+}$
$\forall \mu \in \mathbb{R}$
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_\lambda(t)e^{i\mu t}\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{v_n(t)e^{i\mu t}}_{w_n(t)}\Big)\,dt$$

$\forall t \in [-T,T]$ $|w_n(t)| \leq p_n e^{-\lambda x_n}$ $\sum p_n e^{-\lambda x_n}$ converge. donc la série de fonctions continues converge normalement donc uniformément sur <u>le segment</u> $[-T,T]$.

On peut permuter
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_\lambda(t)e^{i\mu t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} w_n(t)\,dt}_{z_n(T)}.$$

$\forall n$ $\forall T$ $|z_n(T)| \leq p_n e^{-\lambda x_n}$. On a à nouveau la convergence normale donc uniforme. On peut permuter $\sum$ et $\lim_{T\to+\infty}$

Or $\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} p_n e^{-\lambda x_n}e^{i(\mu-x_n)t}\,dt = \begin{cases} p_n e^{-\lambda x_n} & \text{si } \mu = x_n \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

En choisissant $\lambda = 1$ on obtient

$$\forall \mu \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{P}(X=\mu) = e^{\mu}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_1(t)e^{i\mu t}\,dt.$$

la loi de X est déterminée par φ_1 qui est elle même déterminée par Φ_X

q.e.d

Deuxième méthode :

Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $\Phi_X = \Phi_Y$. Montrons qu'elles ont même loi.

Soit $\boxed{P(Z) = \sum_{k=0}^{d} a_k Z^k \text{ dans } \mathbb{R}[Z]}$ (X est déjà pris !)

$$E(P(e^{-X})) = E\left(\sum_{k=0}^{d} a_k e^{-kX}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k E(e^{-kX}) \quad \text{(linéarité de } E)$$

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k \Phi_X(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k \Phi_Y(k)$$

$$\boxed{E(P(e^{-X})) = E(P(e^{-Y}))}$$

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Elle est limite uniforme sur $[0,1]$, d'une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\geq 0}$ et e^{-X} (et e^{-Y}) est à valeurs dans $[0,1]$.

$f(e^{-X})$ est bornée, elle admet donc une espérance et

$$\left| E(f(e^{-X})) - E(P_n(e^{-X})) \right| = \left| E(f(e^{-X}) - P_n(e^{-X})) \right|$$

$$\leq E\left(\left| f(e^{-X}) - P_n(e^{-X}) \right|\right)$$

$$\leq E\left(\| f - P_n \|_{\infty,[0,1]}\right) \quad \text{(variable aléatoire constante)}$$

$$\left| E(f(e^{-X})) - E(P_n(e^{-X})) \right| \leq \| f - P_n \|_{\infty,[0,1]}$$

Donc $E(f(e^{-X})) = \lim_{n\to+\infty} E(P_n(e^{-X})) = \lim_{n\to+\infty} E(P_n(e^{-Y})) = E(f(e^{-Y}))$

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \quad E(f(e^{-X})) = E(f(e^{-Y}))}$$

Soit n dans $\mathbb{N}$ et f_n la restriction à $[0,1]$ **IV.6**
de la fonction définie, si $a \in \mathbb{R}^+$, par

$$\begin{cases} \tilde{f}_n(x) = 1 & \text{si } x \leq e^{-a} \\ \tilde{f}_n(x) = 0 & \text{si } x \geqslant e^{-(a-\frac{1}{2^n})} \\ \tilde{f}_n \text{ est affine sur } [e^{-a}, e^{-(a-\frac{1}{2^n})}] \end{cases}$$

Alors

$$E(\mathbb{1}_{[0,\underset{\min(1,\, e^{-(a-\frac{1}{2^n})})}{\underset{\uparrow}{e^{-(a-\frac{1}{2^n})}}}]}(e^{-X})) \geqslant E(f_n(e^{-X})) \geqslant E(\mathbb{1}_{[0,e^{-a}]}(e^{-X}))$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant a - \tfrac{1}{2^n}) \geqslant E(f_n(e^{-X})) \geqslant \mathbb{P}(X \geqslant a)}$$

Or $X \geqslant a = \bigcap\limits_{n \geq 0}^{+\infty} (X \geqslant a - \frac{1}{2^n})$, donc le

théorème de continuité décroissante permet d'affirmer

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant a) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X \geqslant a - \tfrac{1}{2^n})}$$

On en déduit, par encadrement

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) = \lim_{n \to +\infty} (E(f_n(e^{-X}))) = \lim_{n \to +\infty} E(f_n(e^{-Y}))$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant a) = \mathbb{P}(Y \geqslant a)}$$

Or $X > a = \bigcup\limits_{n \geq 0}^{+\infty} (X \geqslant a + \frac{1}{2^n})$.

La continuité croissante donne $\boxed{\mathbb{P}(X > a) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X \geqslant a + \frac{1}{2^n})}$

On en déduit $\underline{\mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(Y > a)}$ et finalement

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \geqslant a) - \mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(Y \geqslant a) - \mathbb{P}(Y > a) = \mathbb{P}(Y = a)}$$

Q.E.D.