Fonctions de plusieurs variables (II)

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 2: Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. On définit :

$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^y f(u,v)\, dv \right) du.$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3: Soit f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des applications $(f_1, \ldots, f_n)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$f(x) = f(0) + x_1 f_1(x) + \cdots + x_n f_n(x).$$

Exercice 4: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série absolument convergente de nombre complexes.
1) Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
On considère maintenant la fonction

$$F : (x,t) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)\ e^{-n^2 t}.$$

2) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
3) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$ et vérifie sur ce domaine l'équation (dite équation de la chaleur) :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t).$$

Exercice 5: Trouver les extremums de $\sum_{k=1}^{n} p_i \ln(p_i)$ sachant que les p_i sont dans $[0,1]$ et vérifient $p_1 + \cdots + p_n = 1$. On prolonge $x \mapsto x\ln(x)$ par continuité en 0.
Indication : Commencer par étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 6: Extremums, sur $\mathbb{R}^2$, de la fonction $\sin x + \sin y + \cos(x+y)$.

Exercice 7:
1) Extremum de $x\ln x + y \ln y + z \ln z$ sur le domaine $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}+^3; x+y+z = 1\}$.
2) Les u_i etant des réels strictement positifs, déterminer les extremums de

$$\sum p_i u_i - \sum p_i \ln p_i$$

sur $\{(p_1, \ldots, p_n); p_i \geq 0, \sum p_i = 1$.