Equations différentielles

Exercice 1: Trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$xy' + y = e^x.$$

Exercice 2: Soit f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'équation différentielle

$$y' - y = f$$

admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3: Soit f une fonction continue 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'équation différentielle

$$y' - y = f$$

admet une unique solution 2π-périodique.

Exercice 4: Soit f une fonction tendant vers 0 en $+\infty$ et a un réel strictement positif. Montrer que toute solution de

$$y' + ay = f(x)$$

tend vers 0 en $+\infty$.
Indication : Exprimer la solution générale de l'équation et utiliser le théorème de convergence généralisé.

Exercice 5: Soit A un réel et B un réel positif. Soit u une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$, à valeurs réelles telle que

$$\forall t \in I \quad u(t) \leq A + B\int_\alpha^t u(s)\, ds.$$

Montrer que $u(t) \leq Ae^{(t-\alpha)B}$.
Indication : Poser $w(t) = e^{-Bt}\int_\alpha^t u(s)\, ds$. Montrer que w est $\mathcal{C}^1$. Que dire de w' ?

Exercice 6:
1) Déterminer la solution y_n du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (n+1)y''(t) - (2n+1)y'(t) + ny(t) = 0 \\ y_n(0) = 0 \\ y_n'(0) = 1 \end{cases}$$

2) Etudier la convergence de la suite (y_n).

Exercice 7: Soient a et b deux fonctions continues sur l'intervalle I à valeurs réelles.
1) Résoudre dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})^2$ le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\ x(t) - b(t)\ y(t) \\ y'(t) = b(t)\ x(t) + a(t)\ y(t) \end{cases}$$

2) Traiter l'exemple

$$\begin{cases} x' = \frac{tx+y}{1+t^2} \\ y' = \frac{-x+ty}{1+t^2} \end{cases}$$

3) En utilisant impérativement la méthode de la variation des constantes, résoudre le système :

$$\begin{cases} x' = x - y + e^t \\ y' = x + y + e^{-t} \end{cases}$$

Exercice 8: Montrer que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ on a

$$\exp({}^t\!A) = {}^t\!(\exp A) \text{ et } \exp \overline{A} = \overline{\exp A}.$$

Exercice 9: Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $\exp A$, $\exp B$, $\exp(A+B)$ et $(\exp A)(\exp B)$. Conclure.

Exercice 10: Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp A$.

Exercice 11: Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\|.\|$ une norme sur $L(E)$ telle que $\|uv\| \leq \|u\|\,\|v\|$ pour tout couple (u, v) d'éléments de $L(E)$ et $\|\mathrm{Id}_E\| = 1$.
Soit u un endomorphisme de E.
1) Montrer que $\|\exp u\| \leq \exp(\|u\|)$.
2) Montrer que $\|\exp u - \mathrm{Id}_E\| \leq \|u\| \exp(\|u\|)$.
3) Montrer que $\|\exp u - \mathrm{Id}_E - u\| \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 \exp(\|u\|)$.

Exercice 12: Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + y + 2t \\ y' = 4x + y - \sin t \end{cases}.$$

Exercice 13: Résoudre le sytème différentiel $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14: Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y + 2z \\ y' = -x - 2y - z \\ z' = -4x + 3y \end{cases}$$

Exercice 15: Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + 9z \\ y' = -3x + 4y - 9z \\ z' = -3x + 3y - 8z \end{cases}$$

avec $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.

Exercice 16: Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 3x - 10y + 2z + 12e^t \\ y' = -2y + z + 3e^t \\ z' = -2x + 4y + 5z - 18e^t \end{cases}$$

Exercice 17: Soit U et V deux élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $B = U{}^tV$, λ un réel et finalement $A = \lambda I_n + B$. On considère le système différentiel :

$$(S) \qquad Y' = AY$$

où Y est à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
1) Si X_0 est dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer la solution X de (S) telle que $X(0) = X_0$.
2) Trouver les sous-espaces vectoriels F de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que si X_0 est dans F alors pour tout t $X(t)$ est dans F.
3) A quelle condition nécessaire et suffisante X possède-t-elle toujours une limite en $+\infty$?

Exercice 18: Résoudre l'équation différentielle suivante, en précisant les solutions maximales :

$$y'' + y = \cos^3 t$$
$$y'' - 2y' + y = e^{|t|}$$
$$y'' - 4y' + 3y = \frac{2t+1}{t^2}e^t$$

Exercice 19: Existence de solutions développable en série entière autour de 0 de l'équation différentielle :

$$xy'' + (1-x)y' + 2y = 0.$$

Exercice 20: Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\lim\limits_{+\infty} f'' + 2f' + f = 0$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 21: Soit l'équation $x^2y'' + 4xy + (2 - x^2)y = 1$. Montrer qu'elle possède une solution développable en série entière. Résoudre ensuite cette équation.

Exercice 22: Résoudre $3(x^2 + x)y'' + (8x + 3)y' + 2y = 0$.

Exercice 23: Trouver les solutions développables en série entière de l'équation :

$$x(1 + x^2)y'' - 2(1 + x^2)y' + 2xy = 0.$$

Exercice 24: On considère l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y'' + xy' - \alpha^2 y = 0.$$

1) Trouver un changement de variable qui ramène cette éqution à une équation à coefficients constants.
2) Existe-t-il une solution polynomiale à cette équation.
3) Trouver les solutions développables en série entière.
4) En déduire un développement en série entière de $\operatorname{ch}(\alpha \operatorname{argsh} x)$.

Exercice 25: Soit l'équation différentielle $x^2y'' - 6xy' + (12 + x^2)y = 0$. En trouver les solutions développables en série entière, puis la résoudre.

Exercice 26: Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' + f \geq 0$. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.
Indication : Poser $g = f'' + f$. Donner la forme générale d'une solution de $y'' + y = g$. Conclure.

Exercice 27:
1) A quelle condition nécessaire sur k l'équation $(1-x^2)y''-xy'+ky=0$ admet-elle une solution polynomiale de degré n ?
2) Montrer que cette condition est suffisante et qu'il existe alors une unique fonction polynomiale unitaire solution de l'équation. En expliciter les coefficients.

Exercice 28: On considère l'équation différentielle :

$$xy''+y'+xy=0.$$

1) Déterminer les solutions développables en série entière. Soit f_0 la solution développable en série entière telle que $f_0(0)=1$.
2) Montrer que

$$x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$$

est solution de l'équation différentielle. La comparer à f_0.
3) Soit f une solution de l'équation sur un intervalle $]0,a[$. Montrer que (f,f_0) est libre si et seulement si f n'est pas bornée.
Indication : Remarquer qu'il existe un intervalle $]0,\alpha[$ sur lequel f_0 ne s'annule pas et calculer f en fonction de f_0. Pour cela on posera $f=hf_0$ et on montrera que h' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On obtiendra h à l'aide d'une primitives d'une fonction dépendant de f_0.

4) Montrer qu'il existe une autre solution (non nulle) de la forme $(\ln x)f_0(x)+g(x)$ où g est la somme d'une série entière.
Indication : Si $f_0(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on cherchera g sous la forme $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n a_n x^n$

Exercice 29: Soient p et q deux applications continues sur un intervalle I, à valeurs réelles, telles que $q\geq p$. Soient x_1 et x_2 des applications non identiquement nulles sur I vérifiant respectivement $x_1''+px_1=0$ et $x_2''+qx_2=0$. On veut montrer qu'entre deux zéros consécutifs de x_1 il existe un zéro de x_2.
1) Soit α et β deux zéros consécutifs de x_1. Expliquer pourquoi $x_1'(\alpha)\neq 0$ et $x_1'(\beta)\neq 0$.
On suppose que x_2 ne s'annule pas sur $[\alpha,\beta]$. On définit

$$w(x)=x_1(x)x_2'(x)-x_1'(x)x_2(x).$$

2) Déterminer en fonction du signe de x_2 sur $[\alpha,\beta]$ et du signe de $x_1'(\alpha)$ les signes de $w(\alpha)$, $w(\beta)$ ainsi que celui de $w'(x)$ sur $[\alpha,\beta]$.
3) Conclure.