Probabilités (III)

Exercice 1: X MP.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K, c > 0$ tels que $\mathbb{P}(S_n > n(\lambda+\epsilon)) \leq Ke^{-cn}$.
2) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K, c > 0$ tels que $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \lambda| \geq \epsilon) \leq Ke^{-cn}$.
3) Quelle est la limite presque sûre de $\frac{S_n}{n}$.

Exercice 2: ENS MP.
On considère des variables aléatoires réelles discrètes X, Y et Z. On suppose que $X+Y$ suit la même loi que $X+Z$.
1) Peut-on affirmer que Y et Z suivent la même loi ?
2) Et si X, Y et Z sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$?
3) Et si X, Y et Z sont indépendantes et bornées ?
4) Et si X, Y et Z sont indépendantes ?

Exercice 3: ENS MP.
Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et telles que $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$ pour $n \geq 1$. Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\epsilon_n}{\sqrt{n}}$.
Indication : Commencer par établir l'inégalité de Paley-Zygmund : si X est une variable aléatoire positive qui n'est pas sûrement nulle, alors pour tout λ de $[0,1]$

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda E(X)) \geq \frac{(1-\lambda)^2 (E(X))^2}{E(X^2)}.$$

(Considérer la variable aléatoire $X.\mathbb{1}_{X\geq \lambda E(X)}$ et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.) En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout n $\mathbb{P}(|S_{2n} - S_n|) > c$. (Prendre $X = (S_{2n} - S_n)^2$.) Conclure, à coup de Borel-Cantelli, en montrant que presque sûrement $(S_{2n} - S_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0.(Considérer plutôt la suite $(|S_{2^{n+1}} - S_{2^n}|)_{n\geq 0}$.)

Exercice 4: ENS MP.
Excellent exercice pour réviser les séries de fonctions.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On pose $\Phi_X : \lambda \in \mathbb{R}^+ \mapsto E(e^{-\lambda X})$. Montrer que Φ_X est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. Montrer que Φ_X caractérise la loi de X.
Indication : (Pour le dernier point)

Première approche : On fixe $\lambda > 0$ et on définit $\phi_\lambda : t \mapsto E(e^{-(\lambda+it)X})$. Montrer que ϕ_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et développable en série entière en tout t_0 de rayon de convergence au moins égal à λ (Taylor-Lagrange, ou sommabilité d'une suite double (Pourquoi ne pas essayer les deux)). En déduire par récurrence sur n que la donnée de Φ_X détermine de manière unique $\phi_\lambda(t)$ pour t dans $]-n\frac{\lambda}{2}, n\frac{\lambda}{2}[$.
Calculer finalement pour $\mu > 0$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i\mu t} \phi_\lambda(t)\, dt$$

et en déduire que Φ_X détermine la loi de X.

Deuxième approche : (Peut-être un peu plus rapide. Ne nécessite pas de prouver que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$.) Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $\Phi_X = \Phi_Y$. Montrer que pour tout polynôme P : $E(P(e^{-X})) = E(P(e^{-Y}))$. En déduire que pour tout fonction f continue sur $[0,1]$ $E(f(e^{-X})) = E(f(e^{-Y}))$. En considérant une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions continues définies sur $[0,1]$ vérifiant $\mathbb{1}_{[0,e^{-a}]} \leq f_n \leq \mathbb{1}_{[0,e^{-(a-\frac{1}{2^n})}]}$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(Y \geq a).$$

Prouver par la même technique (ou déduire du résultat précédent en utilisant la continuité croissante)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(Y > a).$$

Conclure.

Exercice 5: Non extrait d'annales de concours.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0,1[$. On pose pour $n \geq 1$ $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$.

Montrer que, si a et b sont deux réels avec $a < b$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$

Indication : Si on pose $b_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $a\sqrt{npq} \leq k - np \leq b\sqrt{npq}$ alors $b_{n,k} \sim \dfrac{e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}}$, uniformément par rapport à k (en ce sens que le rapport tend uniformément vers 1 sur le domaine des k considéré).

Exercice 6: X MP.
Soit $\lambda > 0$. Soit X_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et $Z_\lambda = \dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

1) Pour t dans $\mathbb{R}$, calculer la limite lorsque λ tend vers $+\infty$ de $E(\exp(itZ_\lambda))$.
2) Soit a une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Justifier l'existence pour x dans $\mathbb{R}$ de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \exp(itx)\, dt.$$

Déterminer la limite lorsque λ tend vers $+\infty$ de $E(f(Z_\lambda))$.
3) On admet que, pour tout y dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2} + ity)\, dt = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$ (note [1]). En déduire une autre expression de la limite obtenue à la question précédente.
Indication : Vous serez amené à permuter deux signes d'intégration. Vous y êtes autorisé, sans justication.
4) Généraliser le résultat obtenu à la question précédente.
Indication : L'idée est peut-être d'étendre le résultat aux fonctions a continues par morceaux et intégrables, en montrant que de telles fonctions sont limites aux sens de la norme N_1 de fonctions continues et intégrables et que dans ce cas les (f_n) associées convergent uniformément vers f, et les espérances aussi (comme fonction de λ).

1. Et j'espère que vous seriez capable de le démontrer s'il le fallait !