Algèbre bilinéaire (II)

Espaces préhilbertiens

Exercice 1: Dans un espace préhilbertien E, si un sous-espace F est tel que $E = F \oplus F^\perp$ alors $F = (F^\perp)^\perp$.

Exercice 2: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $0 \leq \operatorname{tr}({}^tAA)$ et $|\operatorname{tr} A| \leq \sqrt{n \operatorname{tr}({}^tAA)}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 3: Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose : $q(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i x_j\right)^2$. Montrer que $(\mathbb{R}^n, q)$ est un espace euclidien. Donner une base orthogonale de cet espace.

Exercice 4: Soit E un espace préhilbertien réel, soient (u, v, w) trois vecteurs unitaires. Quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre $(u|v) + (v|w) + (w|u)$?

Exercice 5: Montrer que si E est un espace euclidien, pour tout couple (x, y) de points de E il existe un unique point z dont les distances à x et à y soient égales à la moitié de la distance de x à y. Montrer que ce résultat n'est pas vrai pour un espace vectoriel normé quelconque.

Exercice 6: Montrer qu'une norme $\|.\|$ sur un espace vectoriel réel est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité de la médiane :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Exercice 7: Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. montrer que u est trigonalisable si et seulement si il est trigonalisable dans une base orthonormale.

Exercice 8: Soit M une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale U et une matrice triangulaire supérieure T telles que $M = UT$.
2) Si $M = (m_{i,j})$, établir que $|\det M| \leq \displaystyle\prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2\right)^{1/2}$.

Exercice 9: Soient p et q des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien. Montrer que

$$pq = 0 \Leftrightarrow qp = 0.$$

Exercice 10:
1) Si A est élément de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ alors A et ${}^tAA$ ont le même noyau.
2) De même que dire des images de A et $A{}^tA$?

Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 11: Soit A une matrice symétrique réelle. Si il existe k entier tel que $A^k = I_n$ alors $A = I_n$.

Exercice 12: Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I + {}^tAA) \geq 1$.

Exercice 13: . On considère l'application f de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même qui à une matrice M associe la matrice $f(M) = M^tM$. Etant donné deux matrices symétriques M et N, on pose $M \leq N$ si et seulement si $N - M$ est positive. Cette relation est une relation d'ordre. Montrer que pour cette relation f est convexe.

Exercice 14:
1) Soit A une matrice symétrique réelle définie positive. Montrer que

$$\mathrm{tr}\ A \geq n\sqrt[n]{\det A}.$$

2) Soient A_1 et A_2 deux matrices réelles symétriques et positives. Montrer que :

$$\mathrm{tr}\,(A_1A_2) \geq n\sqrt[n]{\det(A_1A_2)}.$$

Exercice 15: Soit E un espace euclidien, a et b deux éléments non nuls de E. On définit

$$u_{a,b} : x \mapsto x + < a, x > b.$$

1) Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de $u_{a,b}$.
2) A quelle condition sur (a, b) $u_{a,b}$ est-il diagonalisable ?
3) Pour quelles valeur de (a, b) $u_{a,b}$ est-il un automorphisme. Expliciter alors son inverse.
4) Déterminer $u^*_{a,b}$.
5) Pour quelles valeurs de (a, b), $u_{a,b}$ est-il symétrique ?
6) Pour quelles valeurs de (a, b), $u_{a,b}$ est-il orthogonal ?

Exercice 16: Soit M une matrice symétrique de $S_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel
1) Montrer que la fonction $X \mapsto {}^tXMX$ atteint un maximum sur $S(0, 1) = \{X, \|X\| = 1\}$. On note λ_0 ce maximum et X_0 un vecteur de norme 1 pour lequel il est atteint.
2) Montrer que $\phi : (X, Y) \mapsto {}^tX(M - \lambda_0 I_n)Y$ est une forme bilinéaire symétrique positive.
3) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii pour une forme bilinéaire symétrique positive.
4) En déduire que pour tout X de $\mathbb{R}^n$ $\phi(X, X_0) = 0$ puis que X_0 est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_0.

Exercice 17: Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Soient $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés. On note

$$G_k = \text{Vect}\,\{e_k, \ldots, e_n\}.$$

1) Montrer que pour tout x non nul de G_k on a

$$\frac{(x|u(x))}{\|x\|^2} \geq \lambda_k.$$

2) Montrer que tout espace de dimension k contient un élément non nul de G_k.
3) Si F est de dimension k, montrer

$$\max_{x \in F - \{0\}} \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2} \geq \lambda_k.$$

4) En déduire

$$\min_{\dim F = k} \max_{x \in F - \{0\}} \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2} = \lambda_k.$$

Exercice 18: Soit A une matrice symétrique réelle positive. Montrer que $\max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} a_{i,i}$.

Exercice 19: Soient $(f_1, \ldots, f_p)$ des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E de dimension n. On suppose que

$$\sum_{k=1}^{p} \text{rg } f_k = n \text{ et } \sum_{k=1}^{p} < f_k(x), x >= \|x\|^2.$$

Montrer que les sous espaces Im f_k sont supplémentaires orthogonaux et que f_k est le projecteur orthogonal sur Im f_k.

Isométries

Exercice 20: Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, soient $(v_1, \ldots, v_p)$ et $(w_1, \ldots, w_p)$ deux familles de vecteurs de E telles que pour tout couple (i, j) on ait : $(v_i|v_j) = (w_i|w_j)$.
1) Comparer les rangs de ces deux familles de vecteurs.
2) Montrer qu'il existe une isométrie de E qui envoie chaque v_i sur w_i.

Exercice 21: On pose $J = \begin{pmatrix} I_m & O \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, toutes les matrices étant à coefficients réels. On suppose ${}^tMJM = J$, montrer que A et D sont inversibles.

Exercice 22: Soit $U = {}^t(u_1, \ldots, u_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 1$. Montrer que la matrice $A = I_n - 2U{}^tU$ est orthogonale. Identifier l'endomorphisme qu'elle définit.

Exercice 23: .

1) Montrer que si $(a_{i,j}) \in O(n, \mathbb{R})$, on a $\left| \sum\limits_{i,j} a_{i,j} \right| \leq n$.
2) Etudier le cas d'égalité.

Exercice 24: Décomposition polaire.
1) Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tAA$ est symétrique définie positive.
2) Soit M une matrice symétrique définie positive, montrer qu'il existe une matrice S symétrique définie positive telle que $M = S^2$.
3) Montrer que S est unique.
Indication : On diagonalisera S, puis on en déduira que S est un polynôme en M. Mais il existe aussi d'autres justifications.
4) En déduire qu'il existe un unique couple (O, S) où O est orthogonale et S symétrique définie positive tel que $A = OS$.
5) Montrer que $O(n)$ est compact.
6) Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.
7) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
8) En utilisant les trois questions précédentes, montrer que l'existence de la décomposition OS, S dans $S_n^+(\mathbb{R})$ est toujours assurée pour une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 25: On considère

$$\begin{array}{rccl} H & : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & V & \mapsto & I_n - 2\frac{V{}^tV}{{}^tVV} \end{array}$$

1) Montrer que $H(V)$ est orthogonale.
2) Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=2}^n |a_i| > 0$, $\epsilon = \pm 1$. Montrer que

$$H(a + \epsilon \|a\|_2 e_1)(a) = -\epsilon \|a\|_2 e_1.$$

3) Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Etudier l'existence d'une matrice H_1 orthogonale telle que $H_1 A = A_2$, A_2 est de la forme :

$$A_2 = \left(\begin{array}{c|c} x & \\ 0 & \\ \vdots & X \\ 0 & \end{array} \right).$$

4) En déduire que toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = QR$ où Q est orthogonale et R triangulaire supérieure.

Exercice 26: Soit E un espace euclidien (de dimension finie) et u un élément de $O(E)$.
1) Montrer que :

$$E = \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}).$$

2) On pose

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Etudier la convergence de (v_n) et la nature de sa limite.
Indication : Se placer sur chacun des deux sous-espaces.

Exercice 27: Soit E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E, $\mathcal{B} = (u_i)$ et $\mathcal{C} = (v_j)$ deux bases orthonormales de E. Montrer que le scalaire

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} (f(u_i)|g(v_j))^2$$

ne dépend pas des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et donner sa valeur à l'aide de f et g.