Algèbre bilinéaire (I)

Exercice 1: Soit E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit f un projecteur de rang 1. Montrer que f est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|^2 = 1.$$

Exercice 2: Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille liée de vecteurs unitaires deux à deux distincts d'un espace préhilbertien telle qu'il existe un réel α vérifiant

$$\forall (i,j)\ i \neq j \quad (e_i|e_j) = \alpha$$

1) Que vaut α ?
2) Quel est le rang de la famille ?

Exercice 3: Soit E un espace vectoriel préhilbertien dont ϕ est le produit scalaire. Soit $A = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille d'éléments de E. Montrer que A et la matrice

$$G = (\phi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

ont même rang.

Exercice 4: Si p est une projecteur de l'espace euclidien E, alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 5: Soit $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien E. On suppose que pour tout (i,j) avec $i \neq j$ on a $(e_i|e_j) < 0$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.

Exercice 6: Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}$. pour f et g dans E on pose

$$\phi(f,g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\, dt$$

1) Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur E.
2) Soit $F = \{f \in E; f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{g \in E; g'' = g\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires ? Qu'est-ce que la projection orthogonale d'un élément f de E sur G ?
3) Calculer

$$\inf_{g \in G} \int_0^1 ((\sin(\pi x) - g(x))^2 + (\pi \cos(\pi x) - g'(x))^2)\, dx$$

Exercice 7: Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ trois vecteurs unitaires du plan euclidien tels qu'aucun demi-plan ne contienne les trois. Montrer

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\| \leq 1$$

Exercice 8: On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel.
1) Si V est dans $\mathbb{R}^n$, de norme 1, quelle est la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}V$?
2) On considère une matrice par blocs $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq q} \in M_{pq}(\mathbb{R})$, $M_{i,j} \in M_p(\mathbb{R})$. $\Psi = (\Phi_i)_{1 \leq i \leq q} \in \mathbb{R}^{pq}$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^{pq}$. Condition pour que M soit la matrice du projecteur orthogonal sur Ψ ?