Réduction des endomorphismes (III)

Exercice 1: Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A.
Indication : Penser à Cayley-Hamilton.

Exercice 2: Montrer que l'application linéaire $M \mapsto {}^tM$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même est diagonalisable.

Exercice 3: Si G est un sous-groupe fini de cardinal p de $GL_n(\mathbb{C})$ alors tout élément de G est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines p-ième de l'unité.

Exercice 4: Si $E = \mathbb{R}^2$, déterminer tous les éléments de $L(E)$ tels que $f^2 = Id_E$, $f^3 = Id_E$, $f^2 = f$ et $f^3 = f$. On donnera pour cela l'expression de la matrice de f dans une base bien choisie.

Exercice 5: Soit σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. On définit l'endomorphisme T_σ de $\mathbb{C}^n$ par

$$T_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

.
1) montrer que T_σ est diagonalisable.
2) Quel est son polynôme caractéristique, si σ est la permutation circulaire de $(1, \ldots, p)$, $p \leq n$?
3) (*) Dans le cas général exprimer le polynôme caractéristique de T_σ.
Indication : Utiliser la décomposition de σ en cycle et réordonner la base canonique.

Exercice 6: Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que tr $A^k = 0$ pour $1 \leq k \leq n$. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 7: Calculer $\exp(tA)$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indication : On commencera par montrer que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en précisant la matrice de passage.
On calculera ensuite B^k, puis $\exp(tB)$.
On expliquera alors finalement comment on pourrait calculer $\exp(tA)$ à partir de P et $\exp(tB)$, sans obligatoirement finir les calculs.

Exercice 8: Soit u un endomorphisme de rang r, montrer qu'il possède un polynôme annulateur de degré $r + 1$.

Exercice 9: Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que son rang est pair.
Indication : Son rang comme matrice réelle est le même que son rang comme matrice complexe (le justifier).

Exercice 10: E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
1) Soit f et g deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g.
Indication : Décomposer E en somme de sous-espaces propres de l'un des endomorphismes.
2) (*) U est une partie de $L(E)$, non vide, formée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à tous les éléments de U.
Indication : Raisonner par récurence sur la dimension de l'espace.

Exercice 11: Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. On considère l'endomorphisme φ de $M_n(\mathbb{C})$ qui associe à la matrice T la matrice $AT - TB$.
1) Montrer que si α est une valeur propre de A et β une valeur propre de B alors $\alpha - \beta$ est une valeur propre de φ.
2) Démontrer la réciproque. (Démontrer auparavant que deux endomorphisme trigonalisables qui commutent sont simultanément trigonalisables).

Exercice 12: Le corps de base est $\mathbb{C}$. E est un espace vectoriel de dimension finie.
1) Montrer que si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u alors u est diagonalisable.
Indication : Raisonner par récurrence sur la dimension.
2) Etablir la réciproque.
Indication : Montrer qu'un sous-espace est stable si et seulement si il est somme directe de sous-espaces contenus dans les sous-espaces propres.

Exercice 13: Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie E. On suppose $f^3 = -f$, montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, chaque bloc étant nul ou de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 14: E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On considère un endomorphisme f de E et son polynôme minimal M.
1) Quelle relation y a-t-il entre n et le degré de M ?
On suppose l'existence de $v \in E$ tel que $B = (v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ soit une base de E.
2) Montrer que d° $M = n$.
3) Donner l'expression de la matrice de f dans la base B.
4) Réciproque de la question précédente ?
5) On suppose d°$M = n$. Etablir que tout sous-espace de E stable par f est de la forme $\ker(P(f))$ où P est un diviseur de M.

Exercice 15: Soit E un espace vectoriel de dimension n. Caractériser les endomorphismes de E dont le polynôme minimal est de valuation p. On pourra commencer par les cas $p = 0$ et $p = 1$.