Algèbre générale

Voici quelques exercices d'algèbre générale, et d'algèbre linéaire élémentaire considérés comme nouveaux lors de la session 2016

Exercice 1: *ENS*
1) Soit E un ensemble, φ une application croissante (pour l'inclusion) de $\mathcal{P}(E)$ vers lui-même. Montrer que φ possède un point fixe.(note [1]) .
2) Soit E et F deux ensembles f une injection de E vers F et g une injection de F vers E. En considérant l'application φ qui à un élément de $\mathcal{P}(E)$ associe $E - g(F - f(A))$ (noté aussi E
$g(F$
$f(A))$, montrer qu'il existe une bijection de E vers F. (note [2])

Exercice 2: *ENS* On peut munir l'ensemble $\mathbb{Z}\mathbb{N}$ d'une structure de groupe commutatif en posant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout k on définit l'élément $e_k = (\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (note [3]).
Soit f un morphisme de groupe de E vers $\mathbb{Z}$, nul sur chaque e_k. Montrer que f est nul.
Indication : (Donnée au concours) On pourra considérer la suite des $(p^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Cas particulier du théorème de Tarski-Knaster, $\mathcal{P}(E)$ étant un treillis complet pour la relation d'inclusion.
2. Théorème connu sous le nom de théorème de Cantor-Bernstein.
3. Attention ! $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre mais ce n'est pas une "$\mathbb{Z}$-base" de E.