Groupes

Exercice 1: Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement. A tout x de G on associe l'application

$$\phi_x : g \mapsto xgx^{-1}.$$

Montrer que ϕ_x est un automorphisme de G et que l'application $\phi : x \mapsto \phi_x$ est un morphisme de groupes. Est-il injectif ?

Exercice 2: Si G est un groupe l'ensemble

$$Z(G) = \{x \in G, \forall y \; xy = yx\}$$

s'appelle le centre de G.
1) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2) Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{R})$?
Indication : On pourra considéré les matrice $I_n + R_{i,j}$.

Exercice 3: Quels sont les morphismes de groupes de $(S_n, \circ)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. On pourra admettre que les transpositions engendrent S_n. On prouvera que deux transpositions sont conjuguées : si τ_1 et τ_2 sont des transpositions il existe une permutation σ telle que $\tau_1 = \sigma\tau_2\sigma^{-1}$.

Exercice 4: Montrer que l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

est un sous groupe de $GL_3(\mathbb{R})$. Déterminer son centre.

Exercice 5: Soit G un groupe fini dans lequel tout élément est d'ordre 1 ou 2. Montrer que $|G|$ est une puissance de 2.

Exercice 6: On considère le groupe additif

$$G = \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{q\mathbb{Z}}.$$

Trouver une condition (p, q) pour que ce groupe soit cyclique.
Indication : Considérer l'ordre maximal d'un élément de G.

Exercice 7: Soit G un groupe commutatif fini.
1) Si x et y sont d'ordres respectifs m et n, premiers entre eux, quel est l'ordre de $x + y$?
2) On ne suppose plus m et n premiers entre eux. Montrer que pour diviseur d de n il existe un élément d'ordre d. En déduire qu'il existe un élément dans G dont l'ordre est le ppcm de m et n.
3) Il existe dans G un élément dont l'ordre est le ppcm des ordres de tous les éléments de G.

Exercice 8: Si m et n sont deux entiers naturels, on note $m\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ l'ensemble des $m.\overline{x}$ où $\overline{x}$ parcourt $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.
Montrer qu'en tant que groupes additifs $m\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et $\dfrac{\mathbb{Z}}{n'\mathbb{Z}}$ sont isomorphes, où $n = n'(n \wedge m)$ ($\wedge$: pgcd).

Exercice 9: On note $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}\mathrm{m}\, z > 0\}$.
1) Montrer que $G = SL_2(\mathbb{R}) = \{M \in M_2(\mathbb{R}); \det M = 1\}$ est un sous-groupe (fermé) de $GL_2(\mathbb{R})$.
2) On définit une application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & G \times \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ & & (g, z) & \mapsto & g.z \end{array}$$

en posant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

3) Montrer que cette application est bien définie, en particulier que son image est bien contenue dans $\mathcal{H}$.
4) Vérifier que

$$\forall (g, g') \in G^2 \ \forall z \in \mathcal{H} \quad g.(g'.z) = gg'.z, \qquad \forall z \in \mathcal{H} \ e.z = z,$$

où $e = I_2$ est l'élément neutre de G. On dit que Φ définit une action de G sur $\mathcal{H}$ ou que G agit sur $\mathcal{H}$ par Φ.

Exercice 10: *(Paris)* Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^{*+}, \times)$.

Exercice 11: *(Paris)* Soit p un nombre premier. Déterminer le nombre d'éléments d'ordre p du groupe symétrique S_{2p}.

Exercice 12: *(Paris)* Soit $n \geq 3$. On note G le sous-groupe des éléments de S_n qui fixent n. Montrer que G est maximal dans l'ensemble des sous-groupes stricts de S_n.

Exercice 13: *(Paris)* Soit n un entier au moins égal à 2, $G_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i X^i ; (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}, \lambda_1 \neq 0 \right\}$.
1) Si P et Q sont dans G_n montrer qu'il existe un unique R de G_n tel que $R \equiv P \circ Q \ [X^n]$. On note $R = P * Q$
2) Montrer que $(G_n, *)$ est un groupe.
3) Déterminer un morphisme surjectif de $(G_n, *)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 14: *(Paris, Lyon, Cachan)*
1) Déterminer $GL_2\left(\dfrac{Z}{2\mathbb{Z}}\right)$. Quelle est sa structure algébrique ?
2) A quel groupe est-il isomorphe ?

Exercice 15: *(X)* Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes.