Séries entières

Exercice 1:
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} z^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) z^n$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \arccos(1 - \frac{1}{n^2}) z^n$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n z^n$, avec $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3+1}$.

Exercice 2:
Etudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence des séries entières de l'exercice 1.

Exercice 3: Le classique des classiques :
1) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini.
Calculer pour $r > 0$, et n entier, la valeur de

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, dt.$$

2) Si il existe A, B réels et p entier tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq A + B|z|^p$$

alors f est une fonction polynomiale de degré au plus p.
3) **Son cousin :** Avec les mêmes hypothèses que dans la première question, calculer pour $r > 0$, et n entier, la valeur de

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\, dt.$$

Exercice 4: Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières. On suppose que $(a_n) \sim (b_n)$. Montrer qu'elles ont même rayon de convergence.

Exercice 5: Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière à coefficients non nuls. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = l$$

existe. Que dire du rayon de convergence de la série entière ?

Exercice 6: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ avec $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$ pour tout n. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 7: Déterminer le rayon de convergence et étudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1}(n^{\frac{1}{n}}-1)z^n$$

Exercice 8: Donner le développement en série entière (en précisant le rayon de convergence) de la fonction

$$\arctan\frac{x\sin a}{1-x\cos a}$$

Exercice 9:
1) Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R et de somme $f(x)$ sur $]-R,R[$, quelle est la somme de $\sum_{n\geq 0} n a_n x^n$?
2) En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ et leur domaine de validité.

Exercice 10: Si α est un réel qui n'est pas un multiple de π quels sont les rayons de convergence et les valeurs sur leurs intervalles de convergence des séries entières

$$\sum_{n\geq 0}(\cos n\alpha)x^n \text{ et } \sum_{n\geq 1}(\sin n\alpha)x^n.$$

Exercice 11: Rayon de convergence et expression simple de la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-x)^n}{(2n+1)(2n+3)}.$$

On étudiera en particulier les bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 12: Soit $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R. Montrer que pour tout z_0 de $D(0,R)$ $\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n$.

Exercice 13: Montrer qu'il existe une série entière $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1, telle que $f(0)=1$ et pour tout **complexe** z de module strictement inférieur à 1 : $(f(z))^2=(1+z)$.

Exercice 14:
1) Développer en série entière la fonction

$$f : x\mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

On recherchera une équation différentielle vérifiée par f.
2) Même question pour l'application

$$g : x\mapsto (\arcsin x)^2.$$

On recherchera une équation différentielle vérifiée par g'.

Exercice 15:
1) Etudier la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\cos^{2n}x$.
2) Calculer et développer en série entière $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a\cos^2 x}$.
3) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt$.