Séries de nombres réels ou complexes

Exercice 1: Etudier la convergence des séries dont le terme général est

$$\sqrt[3]{n^3+2n+1}-n,\quad \arctan\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\arctan\sqrt{1-\frac{1}{n}},\quad ne^{-n},\quad e^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 2: Déterminer un équivalent simple de $\ln(n+1)-\ln n$ et de $\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln n)$, en déduire la nature des séries de terme général $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n\ln n}$.

Exercice 3:
1) Donner un exemple d'une série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ convergente et telle que l'on a pas $(u_n)=\circ(\frac{1}{n})$.
2) On suppose (u_n) positive et décroissante. Montrer que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $(u_n)=\circ(\frac{1}{n})$.

Exercice 4: Nature de la série de terme général : $u_n=\dfrac{n^{\ln n}}{n!}$.

Exercice 5: Nature de la série de terme général $u_n=\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 6: Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln k$.

Exercice 7: On définit (u_n) par $u_{n+1}=1-\cos(u_n)$. Nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 8: On considère la suite déterminée par la relation de récurrence $u_0>0$ $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$. Etude, limite, équivalent. Nature de la série associée

Exercice 9: Soit u_n une suite décroissante de limite nulle. On suppose qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que $u_{n_k}\geq\dfrac{1}{n_k}$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 10: Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{\alpha}{n}+v_n$ où la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est absolument convergente. Montrer qu'il existe c réel strictement positif tel que $(u_n)\sim(\frac{c}{n^\alpha})$.

Exercice 11: Equivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^{\frac{1}{k}}-1)$.

Exercice 12: Nature de la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

Exercice 13:
1) Etudier la suite u_n telle que $u_1=1$, et $u_{n+1}=u_n\dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.
2) Nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n^\alpha$.

Exercice 14: Nature de la série de terme général $\dfrac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2}$.

Exercice 15: (u_n) est une suite de réels strictement positifs. Comparer les natures $\sum u_n$ et $\sum\dfrac{u_n}{S_n}$ où $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.

Exercice 16: Une suite (u_n) est donnée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$ avec $0 < a < b$. Existe-t-il un α tel que $(n^\alpha u_n)$ ait une limite non nulle ? Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 17: On considère $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
Indication : Etudier $(\ln u_n)_{n\geq 1}$.
2) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ tels que $u_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$.

Exercice 18: Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda < 0$.
1) Déterminer $\lim \frac{f(n+1)}{f(n)}$.
2) En déduire que $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge.
3) Montrer que

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \sim f(n) \frac{e^\lambda}{1 - e^\lambda}.$$

Exercice 19: Nature de la série de terme général $\left(\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...(2n)}\right)^\alpha$. Dans un premier temps, pour obtenir un équivalent du terme général on pourra utiliser la formule de Stirling, puis prouver directement l'existence d'un équivalent de la forme $C\,n^\beta$, sans déterminer C.

Exercice 20: Une suite (u_n) est donnée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$ avec $0 < a < b$. Existe-t-il un α tel que $(n^\alpha u_n)$ ait une limite non nulle ? Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 21: Nature des séries :

$$(-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n} \qquad (-1)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}\right]$$

Exercice 22:
Donner un équivalent de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}.$$

Exercice 23: Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ converge et donner un équivalent du reste.

Exercice 24: Soit $\alpha > 0$, $u_1 > 0$ et (u_n) définie par

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

1) Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle convergente.
2) Si (u_n) converge vers l donner un équivalent de $u_n - l$.
3) Si (u_n) diverge donner un équivalent de u_n.

Exercice 25: On se donne u_0 dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ et on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence selon $u_{n+1} = u_n \cos(u_n)$.
1) Nature de $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$?
2) Nature de $\sum_{n\geq 0} u_n$?

Exercice 26: Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \sin(\sqrt{n^2+k^2}\pi)$ où k est un réel positif.

Exercice 27:
Etant donnée une suite (u_n), positive, décroissante et tendant vers zéro, on pose $a_n = n(u_n - u_{n+1})$. Comparer les natures des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n$, et, le cas échéant, les sommes de ces séries.

Exercice 28:
Montrer que la série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{2k+2} + \cdots$$

converge et calculer sa somme.

Exercice 29:
1) Montrer que la suite (u_n) est convergente si $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.
2) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$converge.
3) Exprimer $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \frac{\ln k}{k}$ à l'aide de u_{2n}, u_n et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
Indication : Considérer $v_n - u_{2n}$.
4) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ (le résultat dépend de la constante d'Euler).

Exercice 30: Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln k$.

Exercice 31:
Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{n + (-1)^{n-1}}.$$

Exercice 32:
(a_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs. Que dire de la série $\sum_{n\geq 0} b_n$ où

$$b_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}}?$$

Exercice 33:
Soit

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente, on note α sa limite.
2) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha$.
3) Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de $\alpha_n - \alpha$.

Exercice 34:
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.
1) Montrer que pour tout x de $[0,1[$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente.
2) Prouver que :

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \ell.$$

Indication : Remarquer que

$$1-x = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$$

et penser à Cesàro.

Exercice 35:
1) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = 0$ si n n'est pas un carré, $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré ?
Indication : Revenir au tout premier critère de convergence d'une série à termes positifs.
2) Soit $v(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture de n en base 10. Etudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{v(n)}{n(n+1)}$.
Indication : Interpréter la convergence en terme de sommabilité et utiliser le théorème de sommation par paquets.
3) Adapter la méthode pour étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = 0$ si n si l'écriture de n en base 10 utilise le chiffre 9, $u_n = \frac{1}{n}$ sinon.