Espaces vectoriels normés II

Exercice 1: Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E, d'intérieur non vide est égal à E.

Exercice 2: Soit f une application définie sur un espace vectoriel normé E et A une partie de E.
1) Montrer que si f est continue en chaque point de A alors la restriction de f à A est continue.
2) Montrer, par un contre-exemple que la réciproque est fausse en général.
3) Montrer que la réciproque est vraie si l'on suppose que A est un ouvert.

Exercice 3: Soit f une application uniformément continue de E vers F, espaces vectoriels normés. Montrer qu'il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| \leq A\|x\| + B.$$

Exercice 4: Soit n un entier non nul, A et P deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que (A^k) tende vers P. Montrer que $AP = PA$ et $P^2 = P$.

Exercice 5: On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\sum a_n X^n\| = \sup |a_n|$.
1) L'application $f : P \mapsto P(1)$ est-elle continue ?
2) Montrer que le sous-espace $F = \text{Ker } f$ est dense dans E.

Exercice 6: Soit E un espace vectoriel normé. $F = \text{Ker } u$ où u est une forme linéaire. Montrer que F est fermé si et seulement si u est continue.

Exercice 7: Soit E l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$. On considère le sous-espace F des fonctions f telles que

$$\int_0^1 f(t)\, dt = 0.$$

1) Montrer que tout élément f de F possède une unique primitive $T(f)$ dans F.
2) Montrer que T est une application linéaire continue de F vers F.

Exercice 8: Soient E et F deux espaces vectoriels normés et u une application linéaire de E vers F. Montrer que si l'image par u de toute suite tendant vers zéro est une suite bornée alors u est continue.

Exercice 9: Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé. Montrer que ce sous-espace est fermé. En déduire que si x est un élément de E qui n'est pas dans F alors $d(x, F) > 0$.

Exercice 10: Dans un e.v.n. E dont A et B sont deux parties. Si A ou B est ouvert alors $A + B$ est ouvert. Si A est compact et si B est fermé $A + B$ est fermé. Si A et B sont compacts $A + B$ est compact.

Exercice 11: Justifier l'existence dans l'espace d'un point qui minimise la somme des distances d'un point à n points fixés.

Exercice 12: Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E et f une application de K dans K telle que

$$\forall (x,y) \in K^2 \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 13: Soit E un e.v.n. et T l'application de E vers E telle que $T(u) = u$ si $\|u\| \leq 1$ et $T(u) = \frac{1}{\|u\|}u$ sinon. Montrer que T est 2-lipschitzienne.

Exercice 14: Soit $f : E \to F$ continue et A une partie de E. Montrer que si A est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans $f(E)$.

Exercice 15: Montrer que $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

Exercice 16:
1) Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.
2) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas homéomorphes.
3) Montrer que $[0,1]$ et U ne sont pas homéomorphes.

Exercice 17: On munit l'espace E des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$ de la norme de la convergence uniforme. Montrer que la sphère unité de E n'est pas compacte.

Exercice 18: Soit K_n une suite décroissante de compacts non vides de E. Montrer que $\bigcap K_n$ n'est pas vide. Le résultat est-il valable pour une suite de fermés ?

Exercice 19: Dans $M_n(R)$ on considère l'ensemble A_p des matrices de rang plus grand ou égal à p. Cet ensemble est-il ouvert ? fermé ? dense ?

Exercice 20: Sur $\mathbb{R}[X]$ on pose $\|P\| = \sup\{|P(t)|; t \in [0,1]\}$. Soit a un réel, les applications qui à P associent $P(a)$ et $P'(a)$ sont elles continues ?

Exercice 21:
1) Montrer que si A est une partie d'un espace vectoriel norméE l'application $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne.
2) Montrer que pour tout x de E

$$d(x,A) = d(x, A \cap B'(x, d(x,A) + 1)).$$

3) En déduire que si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie il existe pour tout x de E un y tel que $d(x,F) = \|x - y\|$.