Convexité

Exercice 1:
1) Soit $(x_1,\dots,x_n)$, $n\geq 1$ une famille finie de réels positifs. Montrer que

$$1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}.$$

Indication : Considérer $f : x\mapsto \ln(1+e^x)$.

Exercice 2: Montrer que toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe et majorée est constante.

Exercice 3: Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe. Montrer que tout minimum local (note [1]) de f est un minimum global.

Exercice 4:
1) Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel réel E. Montrer que l'intersection de toutes les parties convexes contenant A est une partie convexe et que c'est la plus petite partie convexe de E contenant A. On l'appelle l'enveloppe convexe de A et on la note $\mathrm{Conv}(A)$.
2) Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des familles pondérés de points de A.

Exercice 5: *Ecrit X* 2017
Soit $h : x\mapsto x\ln x$ si $x>0$ et $h(0)=0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$. Soit $a>0$.
1) Montrer que

$$\forall x\geq 0 \quad h(x)\geq (x-a)h'(a)+h(a).$$

2) Montrer que cette inégalité est stricte si $x\neq a$.

Exercice 6: Dans le plan $\mathbb{R}^2$,si M, N et P en sont trois points, le triangle MNP est l'ensemble des points de la forme $\alpha M+\beta N+\gamma P$ lorsque (α,β,γ) sont trois réels positifs dont la somme vaut 1.
On considère les points $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(-1,0)$ et $O=(0,0)$. Montrer que le triangle ABC est la réunion des triangles ABO et OBC.

Exercice 7: Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I\mapsto\mathbb{R}$ bornée telle que, pour tout (x,y) de I^2, $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

1. On dit que f admet un minimum local en a s'il existe $\epsilon>0$ tel que pour tout x de $]a-\epsilon,a+\epsilon[$ on ait $f(x)\geq f(a)$