Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1:

1) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n.$$
2) On pose $P_n(x)=x(x-1)\cdots(x-n)$. Montrer qu'il existe un unique r_n dans $]0,1[$ tel que $P_n'(r_n)=0$.
3) Montrer que r_n appartient à $]0,\frac{1}{2}[$. (Utiliser $\frac{P_n'}{P_n}$.)
4) Etudier
$$h:x\mapsto\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$
En déduire un équivalent de r_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2: Soit f et g continues de $[0,1]$ vers $[0,1]$ telles que $f\circ g=g\circ f$.
1) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est non vide et admet un plus grand et un plus petit élément.
2) Montrer qu'il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x)=g(x)$.

Exercice 3: [*]

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et
$$J_0,J_1,\cdots,J_{n-1},J_n=J_0$$
des intervalles (segments) de I tels que pour tout k de $[1,n]$ J_k est inclus dans $f(J_{k-1})$. Montrer qu'il existe un point p de I tel que $f^n(p)=p$ (composition n fois) et pour tout k $f^k(p)$ appartienne à J_k.
2) Soit f continue tels que il existe p tels que $f^3(p)=p$ et $f^2(p)\neq p$ et $f(p)\neq p$ montrer alors qu'il existe pour tout k de $\mathbb{N}$ un x tel que $f^k(x)=x$ et que pour tout $l<k$ $f^l(x)\neq x$.

Exercice 4: Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ vers $[a,b]$, avec $0<a<b$, et f une fonction de classe C^1, définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'=\phi\circ f$.
1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I=f(\mathbb{R})$, et que f^{-1} est de classe C^1 sur I.
2) Prouver que I est égal à $\mathbb{R}$.
3) Pour y dans $\mathbb{R}$ exprimer $(f^{-1})'(y)$ en fonction de f et de ϕ.

Exercice 5: [CCS] Soit f une fonction continue et décroissante sur $[\frac{\pi}{2},+\infty[$
1) Montrer $\tan x=f(x)$ possède une unique solution x_n sur $I_n=]n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}[$.
2) Donner un équivalent de x_n.
3) $y_n=x_n-n\pi$. Que dire de (y_n) ?
4) $f(x)=\frac{1}{x}$. déterminer a, b et c tels que
$$x_n=n\pi+a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\circ(\frac{1}{n^2})$$
5) Même question avec $f(x)=-x$.

Exercice 6: [CCMP] On note pour $n\geq 1$

(E_n)
$$x=1+\ln(x+n)$$

1) Montrer que E_n admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{*+}$, notée α_n.
2) Donner un équivalent de α_n et e^{α_n}.
3) Déterminer la limite, notée l, de $(\alpha_n-\ln(n))$.
4) Quelle est la nature de la série de terme général
$$\alpha_n-\ln(n)-l?$$

Exercice 7: [X] On note x_n la racine réelle de $x^n - nx + 1 = 0$. Donner les premiers termes du développement asymptotique de x_n.

Exercice 8:
1) Soit P un polynôme réel scindé à racines simples. Prouver que P' est scindé à racines simples.
2) Soit P n polynome réel scindé. Montrer que P' est scindé.

Exercice 9: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tendant vers 0 en $+\infty$, et telle qu'il existe x_0 avec $f(x_0)f'(x_0) \geq 0$. Prouver l'existence d'un $x_1 \geq x_0$ tel que $f'(x_1) = 0$. Prouver l'existence d'une suite strictement croissante $(x_k)_{k\geq 1}$ telle que $f^{(k)}(x_k) = 0$.

Exercice 10: Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs complexes il n'existe pas nécessairement un élément c de $[a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Exercice 11: Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(x) = e^x$ ne possède qu'un nombre fini de racines.

Exercice 12: [Le théorème de Darboux] Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ à valeurs réelles, on suppose $f(a) > f(b)$ ainsi que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.
1) Faire un dessin.
2) Il existe c de $]a, b[$ tel que $f(c) > f(a)$.
3) Il existe d de $]a, b[$ tel que $f(d) = f(a)$.
4) Il existe e de $]a, b[$ tel que $f'(e) = 0$.
5) Convaincre votre interlocuteur que les différentes possibilités découlant de la simple hypothèse $f'(a)f'(b) < 0$ pourraient se traiter de la même manière.
6) Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ à valeurs réelles, telle que $f'(a) = \alpha$ et $f'(b) = \beta$, soit γ un réel compris entre α et β, en considérant la fonction $g(x) = f(x) - \gamma x$ établir qu'il existe un réel c de $[a, b]$ tel que $f'(c) = \gamma$.

Exercice 13: [Règle de L'Hospital] Soient f et et g deux applications à valeurs réelles continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b]$. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$ et que g ainsi que g' ne s'annulent pas sur $]a, b]$. Etablir que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad ,$$

dès que le membre de droite existe. (On pourra prouver que pour tout x de $]a, b]$ il existe c dans $]a, x[$ tel que $f(x)g'(c) - f'(c)g(x) = 0$, on introduira pour cela fonction $\phi(t) = f(x)g(t) - f(t)g(x)$.)

Exercice 14: Soit f une fonction à valeurs réelles deux fois dérivable sur $[a, a + 2h]$ $(h > 0)$. Montrer qu'il existe un réel θ compris entre 0 et 1 tel que : $f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h) = h^2 f''(a + 2\theta h)$.
Indication : Définir la fonction $\phi(x) = f(a) - 2f(a + x) + f(a + 2x) - Ax^2$ où A est déterminé par $\phi(h) = 0$ (est-ce possible ?) et utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 15:
1) Donner la partie principale en 0 de la fonction $\phi(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$
2) Montrer que cette fonction peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$