EXERCICES CLASSIQUES

Ces exercices, illustrant des méthodes dont la maîtrise est impérative, sont rangés dans l'ordre de leur apparition dans le cours. Les exercices marqués du symbole (*) ne doivent être abordés que lorsque les autres sont assimilés.

Exercice 1: Soit n un entier au moins égal à 2. Montrer que l'équation

$$x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1 = 0$$

possède au plus une solution x_n strictement positive.

Exercice 2: La fonction $f : x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3: Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction quatre fois fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$. Alors, pour tout x de $[0,1]$ il existe c dans $]0,1[$ tel que

$$f(x) = f^{(4)}(c)\frac{x^2(1-x)^2}{24}.$$

Exercice 4: Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et solution du problème différentiel :

$$y'' + y = 0,\ y(0) = a,\ y'(0) = b$$

si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout x :

$$f(x) = a + bx - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

Exercice 5: Montrer que si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des réels positifs alors :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Exercice 6: Prouver

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Exercice 7: Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 8: Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 9:
1) Rappeler la définition de $O_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice 10: Si A est une partie non vide d'un espace normé, montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 11: Montrer que dans un espace vectoriel normé tout sous-espace de dimension finie est fermé.

Exercice 12: *(*)* Montrer que si x est un élément d'un espace vectoriel normé E et si F est un sous-espace de dimension finie de E, il existe x_0 dans F tel que $d(x, F) = \|x - x_0\|$.

Exercice 13: *Le lemme de Cesàro*
Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé quelconque convergeant vers la limite l. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

converge aussi vers l.

Exercice 14: *(*)* Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels vérifiant $\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad u_{n+m} \leq u_n + u_m$ et telle que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ soit minorée. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 15: Nature de la série de terme général $e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 16: Nature de la série de terme général $e^{-\sqrt{\ln n}}$.

Exercice 17: Nature de la série de terme général $\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(2n)^n}$.

Exercice 18: Nature de la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^2}$.

Exercice 19: Nature de la série de terme général $\dfrac{1}{(\sqrt{n})(\ln n)^2}$.

Exercice 20: Nature, suivant la valeur du paramètre réel strictement positif α, de la série

$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

Exercice 21: Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

Exercice 22: Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 23: Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Exercice 24: Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Exercice 25: Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\sqrt{\ln n}}}$.

Exercice 26: Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{n!(2n)!} a^n$ $(a > 0)$.

Exercice 27: *(*)* Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$?

Exercice 28: *(*)* Montrer que $\dfrac{n!}{e^n n^n \sqrt{n}}$ possède une limite finie en $+\infty$ (sans utiliser la formule de Stirling).

Exercice 29: Nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 30: On pose, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

1) Justifier l'existence de I_n.
2) Etudier la suite (I_n) (monotonie,limite).
3) Etudier la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} I_n$.
4) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
5) En déduire l'expression de I_n.
6) Etudier la série $\sum_{n\geq 1} I_n$.

Exercice 31: Soit

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente, on note α sa limite.
2) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha$.

Exercice 32: Soit
$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \operatorname{argsh} n.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente.
2) On note α sa limite. Donner un équivalent de $\alpha_n - \alpha$, en supposant qu'on possède un équivalent de $\alpha_n - \alpha_{n+1}$ de la forme $\frac{K}{n^\beta}$, $\beta > 1$.
3) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha_{n+1}$ de la forme $\frac{K}{n^\beta}$.

Exercice 33: Soit
$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente, on note α sa limite.
2) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha$.

Exercice 34: On considère
$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2}$$

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que f possède en $+\infty$ un équivalent de la forme At^α.

Exercice 35: Soit
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Trouver un équivalent simple de f lorsque x tend vers $+\infty$.
3) Trouver un équivalent simple de f lorsque x tend vers 0.

Exercice 36: On définit f par
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 37: On définit f par
$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 38: *(*)* Montrer que $f : \theta \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ est continue sur $]0, \pi[$.

Exercice 39: On considère la suite u_n définie par $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour $n \geq 1$.
1) Montrer que cette suite converge et préciser sa limite.
2) Si ℓ est sa limite, donner un équivalent de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 40: On considère la suite u_n définie par $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$ pour $n \geq 1$.
1) Montrer que cette suite converge et préciser sa limite.
2) Nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$?

Exercice 41: En comparant avec une intégrale trouver un équivalent de $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 42:
1) Etudier la convergence simple de la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$, définies sur $\mathbb{R}^+$ par
$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n], \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$.

Exercice 43: En utilisant la formule du binôme et en faisant apparaître une série de fonctions montrer que pour tout nombre complexe z :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Indication : Ce ne sont pas des fonctions de z qui peut être considéré comme fixé, mais des fonctions de n.

Exercice 44: Enoncer et démontrer le théorème de permutation des limites.

Exercice 45:
1) Enoncer le théorème de Weierstrass sur l'approximation par les polynômes des fonctions.
2) Démontrer ce théorème pour une fonction f continue de $[0,1]$ vers $\mathbb{C}$.

Exercice 46: Prouver que pour tout couple (z,z') de nombres complexes : $\exp(z+z') = \exp(z)\ \exp(z')$.

Exercice 47:
1) Donner développement en série entière de $(1+x)^\alpha$, où α est un nombre réel non entier. On précisera son rayon de convergence.
2) Démontrer le résultat établi à la question précédente.

Exercice 48: On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2n+1}.$$

1) Rayon de convergence ?
2) Plus grand intervalle sur lequel on a la convergence simple ?
3) Etudier la convergence normale et uniforme sur $[0,1[$ et $[-1,0]$.

Exercice 49: Soit t un réel. Développer en série entière :

$$f : x \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos t + 1).$$

Distinguer les cas $t \in \pi\mathbb{Z}$ et $t \notin \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 50: Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Exercice 51: *(*)* Montrer que $f : x \mapsto e^{e^x}$ est développable en série entière.

Exercice 52: Soit $f(z)$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r \in]0,R[$.
1) Calculer, si n est un entier

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt.$$

2) Calculer

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,dt.$$

Exercice 53: *(*)* Montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x^2+n^2}$ est développable en série entière.