Chapitre 7

Séries entières

7.1 Rayon de convergence d'une série entière

Définition 7.1 *On appelle série entière de la variable complexe une série de fonctions de la variable complexe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, où (a_n) est une suite de nombres complexes.*

Si les fonctions z^n sont considérées comme des fonctions de la variable réelle, on parle de série entière de la variable réelle, on la note usuellement $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Les coefficients restent a priori des nombres complexes.

Lemme 7.1 *(Connu sous le nom de lemme d'Abel) Soit r_0 un réel positif telle que la suite $|a_n|r_0^n$ soit bornée. Pour tout réel r positif, avec $r < r_0$ la série $\sum a_n z^n$ converge normalement donc uniformément sur le disque fermé de centre 0 et de rayon r.*

On peut supposer $r_0 > 0$ sinon la proposition est vraie (mais creuse).
Il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout n entier $|a_n|r_0^n \leq M$. Définissons pour n entier u_n par $u_n(z) = a_n z^n$. Alors

$$\forall z \in \overline{D}(0,R) \quad |u_n(z)| = |a_n||z|^n \leq |a_n|r^n \leq M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n = \alpha_n$$

Or $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ converge (c'est une série géométrique de raison $\frac{r}{r_0} \in [0,1[$), donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\overline{D}(0,R)$.

Définition 7.2 *On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ de l'ensemble des r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.*

Proposition 7.1 *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est aussi l'unique réel positif R tel que pour $|z| < R$ la série $\sum a_n z^n$ converge, et pour $|z| > R$ la série $\sum a_n z^n$ diverge.*

Proposition 7.2 *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est aussi l'unique réel positif R tel que pour $|z| < R$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour $|z| > R$ la série $\sum a_n z^n$ ne converge pas absolument.*

Quelques exemples de calcul de rayons de convergence.

$$\sum_{n\geq 0} n^\alpha z^n,\ \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{3n}}{2n+1},\ \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2}, \sum_{n\geq 0}(-1)^n n! x^n.$$

Proposition 7.3 *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b. Si pour tout n $a_n \leq b_n$ alors $R_a \geq R_b$. Ce résultat reste vrai sous la condition plus générale $a_n = \mathcal{O}(b_n)$.*

Proposition 7.4 *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b, alors leur somme $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ et leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0}(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p})z^n$ sont des séries entières de rayon de convergence au moins égal à $\min(R_a, R_b)$.*

Définition 7.3 *On appelle disque de convergence d'une série entière le disque <u>ouvert</u> de centre 0 et de rayon le rayon de convergence. On appelle intervalle de convergence la trace sur $\mathbb{R}$ de ce disque.*

Toute série entière est absolument convergente en tout point de son disque de convergence. Les exemples précédents montre que la série entière peut être convergente en tout point du bord du disque de convergence, ou simplement en certains de ces points, et parfois même en aucun de ces points.

Théorème 7.1 *Une série entière converge normalement (et de facto uniformément) sur tout compact contenu dans le disque de convergence.*

Mais une série entière ne converge pas nécessairement uniformément sur son disque de convergence.

Théorème 7.2 *La somme d'une série entière est continue sur son disque de convergence .*

7.2 Séries entières d'une variable réelle

Théorème 7.3 *La somme d'une série entière* $\sum a_n x^n$ *d'une variable réelle admet des primitives sur son intervalle de convergence. Elles sont de la forme* $k + \sum \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$*, où* k *est une constante réelle quelconque.*

Théorème 7.4 *La somme d'une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est dérivable sur son intervalle de convergence et sa dérivée est la série entière* $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ *ou* $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

Corollaire 7.1 *La somme d'une série entière est de classe* C^∞ *sur son intervalle de convergence et les rayons de convergence de ses dérivées successives sont tous égaux au rayon de convergence de cette série.*

Définition 7.4 *Une fonction* f *définie sur* $]-r, r[$ *est développable en série entière sur cet intervalle si elle est égale sur cet intervalle à la somme d'une série entière.*

La somme d'une série entière de rayon de convergence R est développable en série entière sur $]-R, R[$.

Définition 7.5 *Si* f *est de classe* C^∞ *sur un intervalle* $]-r, r[$*, on appelle série de Taylor de* f *la série entière*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Proposition 7.5 *Deux séries entières dont les sommes sur un intervalle* $]-r, r[$ *sont égales ont mêmes coefficients.*

Ceci prouve l'unicité du développement en série entière lorsqu'il existe.

Proposition 7.6 *Une fonction* f *définie sur* $]-r, r[$*, est développable en série entière, si et seulement si elle est de classe* C^∞ *et égale sur cet intervalle à la somme de sa série de Taylor.*

7.3 Exemples de développements en série entière

7.3.1 Utilisation de la formule de Taylor

Proposition 7.7 *La fonction* exp *est développable en série entière en* 0*. Son rayon de convergence est* $+\infty$ *et l'on a, pour tout* x *réel :*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Rappelons la formule de Taylor avec majoration du reste de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$.
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur un intervalle I contenant a et b à valeurs réelles et complexes (mais ce résultat peut être étendu aux fonctions à valeurs dans un espace normé de dimension finie en remplaçant le module par la norme) alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{t \in [\min(a,b), \max(a,b)]} |f^{(p+1)}(t)|$$

On peut appliquer cette inégalité à $f = \exp$ avec p quelconque, $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}$. On remarque que $f^{(k)} = f$ pour tout k entier (en particulier $f^{(k)}(0) = 1$) et que

$$\sup_{t\in[\min(0,x),\max(0,x)]} |f^{(p+1)}(t)| \leq e^{\max(0,x)} \leq e^{|x|}$$

Donc, pour tout x réel et tout entier n

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Les croissance comparées de $|x|^n$ et $n!$ donnent $\lim_{\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

De la même manière on obtient pour tout x réel

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

et

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Par exemple, prenons $f(x) = \cos x$ alors $f^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$. Donc, pour k entier $f^{(2k)}(0) = (-1)^{2k}$ et $f^{(2k+1)}(0) = 0$, $|f^{(k)}(x)| \leq 1$. Pour tout entier n en appliquant la formule de Taylor avec majoration du reste à l'ordre $2n+1$ on obtient

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Le résultat découle de $\lim_{\to+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$.

La formule pour sin se démontre de la même manière.

On en déduit, à partir de $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ que pour tout x réel :

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \text{et sh x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{2n+1})!} \mathrm{x}^{\mathrm{2n+1}}$$

7.3.2 Utilisation du développement d'une dérivée

Proposition 7.8 *La fonction* $\ln(1+x)$ *est développable en série entière en* 0. *Son rayon de convergence est* 1 *et l'on a, pour tout* x *de* $]-1,1[$ *:*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

De la même manière on obtiendrait :

Pour x de $]-1,1[$

$$\operatorname{argth} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Pour x de $]-1,1[$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

7.3.3 Utilisation d'une équation différentielle

Proposition 7.9 *La fonction $(1+x)^\alpha$, où α est un réel non entier, est développable en série entière en 0. Son rayon de convergence est 1 et l'on a, pour tout x de $]-1,1[$:*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Si α est un entier, alors $(1+x)^\alpha$ est développable en série entière de rayon de convergence infini et on a, pour tout x réel :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Par analogie on définit $\binom{\alpha}{n}$ pour α réel et n entier par $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ si $n \geq 0$. Il s'agit bien d'une extension du coefficient binomial $\binom{n}{p}$ défini sur $\{(p,n); n \in \mathbb{N},\ 0 \leq p \leq n\}$.

Avec cette convention, on peut écrire

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Démonstration :

On suppose que α est un réel non entier (en particulier il n'est pas nul). La fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]-1,1[$. C'est la seule solution sur I du problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \qquad (1+x)y' - \alpha y = 0, \quad y(0) = 1.$$

On vérifie en effet facilement qu'elle est solution de $(\mathcal{P})$, et d'après le théorème de Cauchy ce problème admet une unique solution sur I car $a : x \mapsto 1+x$ et $b : x \mapsto -1$ sont continues et a ne s'annule en aucun point de I.

On remarquera que dans le cas d'une équation d'ordre un comme celle-ci on sait résoudre le problème et en déduire que f_α est bien l'unique solution, mais dans le cas d'une équation du second ordre, où la méthode qui suit reste inchangée, on ne sait pas résoudre l'équation et l'usage du théorème de Cauchy se révèle indispensable. C'est pourquoi ce style de rédaction a été retenu.

Le principe est de chercher une solution f de $(\mathcal{P})$ sur I, sous la forme de la somme d'une série entière. Par unicité de la solution on aura $f_\alpha = f$, ce qui prouve que f_α est développable en série entière.

On procède par analyse et synthèse.

Analyse : (A noter que cette analyse va nous conduire à une condition suffisante, il n'y a que plus tard lors de l'étude des équations différentielles linéaires et de la recherche de solutions sous la forme de sommes de séries entières que le caractère nécessaire déduit de l'analyse s'imposera.)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $J =]-R,R[$ et

$$\forall x \in J \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } f(0) = a_0.$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in J \quad (1+x)f'(x) - \alpha f(x) &= f'(x) + xf'(x) - \alpha f(x) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= a_1 - \alpha a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n)x^n \\
\forall x \in J \quad (1+x)f'(x) - \alpha f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n)x^n
\end{aligned}$$

Pour que f soit solution de $(\mathcal{P})$ il suffit (c'est d'ailleurs nécessaire, mais cette nécessité ne nous intéresse pas ici, nous l'avons déjà dit) que

$$(\mathcal{R}) \qquad a_0 = 1 \text{ e } \forall n \geq 0 \quad a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n.$$

Synthèse : La relation $(\mathcal{R})$ définit une unique suite $(a_n)_{n\geq 0}$ (nous explicitons pas encore la valeur des a_n, ce qui est important c'est de savoir déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ à partir de $(\mathcal{R})$ et non de de l'expression explicite ds a_n, expression qui en général n'est d'ailleurs pas déterminable).

Cherchons le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Commençons par remarquer que puisque α n'est pas un entier alors pour tout n $a_n \neq 0$. (Si α avait été égal à l'entier p on aurait obtenu $a_{p+1} = 0$, puis, par récurrence $a_k = 0$ pour $k \geq p+1$. la série entière est alors un polynôme de rayon de convergence infini.)

Ensuite, pour tout $x \neq 0$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha - n|}{n+1}|x| = |x|.$$

D'après la règle de d'Alembert on en déduit que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et ne converge pas absolument si $|x| > 1$. Son rayon de convergence est donc égal à 1.

La partie "Analyse" de l'étude montrer que sa somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de $(\mathcal{P})$ sur $]-1, 1[$.

Par unicité de la solution f est donc égale à f_α qui est donc développable en série entière.

On peut maintenant montrer par récurrence que pour $n \geq 1$

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

et obtenir le développement explicite de f_α qui a été annoncé.

7.4 La fonction exponentielle

7.4.1 Les propriétés de la fonction exponentielle

On rappelle que la fonction exponentielle complexe peut être définie sur $\mathbb{C}$ comme la somme de la série entière de rayon de convergence infini

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Cette fonction généralise la fonction exponentielle réelle qui est comme on l'a vu développable en série entière. On la prend pour définition de l'exponentielle même dans le cas réel. On peut donc définir deux fonctions sin et cos par les formules d'Euler

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \ \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Bien que ces fonctions puissent être définies sur $\mathbb{C}$ on ne s'intéressera qu'à leurs restrictions à $\mathbb{R}$. On se propose de montrer que l'on retrouve bien les deux fonctions bien connues, obtenant ainsi une définition analytique rigoureuse de ces fonctions.

On rappelle la propriété fondamentale de l'exponentielle, établie au moment de l'étude du produit de Cauchy de séries de nombres complexes :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \ e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

On en déduit toutes les formules trigonométriques usuelles, en particulier

$$\begin{aligned} \cos^2 t + \sin^2 t &= 1 \\ \cos(a+b) &= (\cos a)(\cos b) - (\sin a)(\sin b) \\ \sin(a+b) &= (\sin a)(\cos b) - (\cos a)(\sin b) \end{aligned}$$

On aura aussi pour tout t réel

$$\begin{aligned}\cos t &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}\\ \sin t &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

Ces deux fonctions s'écrivant comme la somme de séries entières sur $\mathbb{R}$ elle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la dérivation terme à terme donne

$$\begin{aligned}\cos' &= -\sin\\ \sin' &= \cos\end{aligned}$$

Etudions attentivement la fonction cos sur $[0,2]$. La suite $(\frac{t^{2n}}{(2n)!})_{n\geq 2}$ est décroissante si t appartient à $[0,2]$, et tend vers zéro. Par conséquent

$$\forall t\in[0,2]\ 1-\frac{t^2}{2}\leq\cos t\leq 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}.$$

En particulier $\cos 2\leq -\frac{1}{3}$. Puisque cos est continue sur $[0,2]$ et $\cos 0=1$, il existe α dans $[0,2]$ tel que $\cos\alpha=0$. Puisque cos est continue l'ensemble des x de $[0,2]$ tels que $\cos x=0$ est un fermé non vide donc un compact et possède donc un minimum α_0. Définissons le nombre π par $\frac{\pi}{2}=\alpha_0$.

Sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ la fonction cos est strictement positive, donc sin est strictement croissante. Par conséquent $\sin\frac{\pi}{2}=1$, puis les formules d'addition donnent

$$\begin{aligned}\cos(t+\frac{\pi}{2}) &= -\sin t\\ \sin(t+\frac{\pi}{2}) &= \cos t\end{aligned}$$

Par itération, on obtient la périodicité de ces deux fonctions, et leur étude simultanée prouve que 2π est bien leur plus petite période commune et que

$$t\mapsto e^{it}=\cos t+i\sin t$$

est une bijection de $[0,2\pi[$ vers l'ensemble U des nombres complexes de module 1.