Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

6.1 Convergence simple, uniforme, normale

6.1.1 Les différents types de convergence

Définition 6.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un ensemble E vers un e.v.n. F. On dit que cette suite converge simplement vers f, application de E vers F, si et seulement si pour tout x de E la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(f(x))$.*

Vocabulaire 6.1 *En conservant les notations de la définition précédente, et si A est une partie de E, on dira que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si la suite des restrictions des f_n à A converge simplement vers la restriction de f à A. On s'autorisera cette extension de vocabulaire aux autres type de convergence, sans rappel supplémentaire.*

Soient X un ensemble non vide et F un e.v.n.. On peut munir $B(X,E)$, ensemble des applications bornées de X vers E, d'une structure d'espace vectoriel normé en posant :

$$\|f\| = \sup_{x\in X} \|f(x)\|.$$

Cette norme s'appelle la norme de la convergence uniforme.

Définition 6.2 *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications, éléments de l'ensemble $B(X,E)$, converge uniformément vers f, élément de $B(X,E)$, si et seulement si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme de la convergence uniforme.*

Remarque 6.1 *Le programme autorise la notion de convergence uniforme d'une suite de fonctions non bornées. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications, éléments de l'ensemble $\mathcal{A}(X,E)$, converge uniformément vers $f\in\mathcal{A}(X,E)$ si pour tout n $f_n - f$ est bornée et $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 dans $B(X,E)$ pour la norme de la convergence uniforme.*

Si A est une partie de X et si la suite des restrictions des f_n à A converge vers la restriction d'une fonction f à A, on dira que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

Théorème 6.1 *Si une suite de fonctions converge uniformément vers f sur X, alors elle converge simplement vers f sur X.*

Par conséquent avant d'étudier la limite uniforme on étudiera la limite simple.
Exemple : étude de la suite de fonctions $(n^\alpha x^n(1-x))_{n\in\mathbb{N}}$, sur $[0,1]$

Théorème 6.2 (Théorème de la double limite) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur une partie A d'un e.v.n. E, à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie F (exemple $\mathbb{K}$). On suppose que cette suite converge uniformément vers f sur A. Si a est adhérent à A, si chaque application f_n à une limite en a, notée ℓ_n, alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si on note ℓ sa limite , alors la fonction f admet en a une limite égale à ℓ.*

On parle du théorème d'interversion des limites. Schématiquement, lorsqu'il y a convergence uniforme :

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

On retiendra que toute permutation de limites doit être soigneusement justifiée.

Remarque 6.2 *Le lecteur vérifiera à titre d'exercice que ce résultat s'étend, si $E=\mathbb{R}$, au cas où $a=\pm\infty$.*

Démonstration *(Non exigible.)*
Notons N_∞ la norme de la convergence uniforme sur A.

— Supposons tout d'abord que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui justifie momentanément l'existence de ℓ.
Soit x dans a et n dans $\mathbb{N}$, on peut écrire

$$f(x) - \ell = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - \ell_n + \ell_n - \ell$$

En utilisant l'inégalité triangulaire

$$(*) \qquad \|f(x) - \ell\| \leq \|f(x) - f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - \ell_n\|_F + \|\ell_n - \ell\|_F$$

Soit ϵ dans $\mathbb{R}^{*+}$ Puisque $\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \ell$ il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$ $\|\ell_n - \ell\|_F < \frac{\epsilon}{3}$ De même puisque $\|f(x) - f_n(x)\|_F \leq N_\infty(f - f_n)$ et (f_n) converge uniformément vers f, il existe n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$ et **pour tout** x **de** A $\|f(x) - f_n(x)\|_F < \frac{\epsilon}{3}$
Choisissons $n = n_0 = \max(n_1, n_2)$, $(*)$ devient alors

$$(**) \qquad \|f(x) - \ell\| < \frac{\epsilon}{3} + \|f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}\|_F + \frac{\epsilon}{3}$$

Mais $\lim_{x\to a} f_{n_0}(x) = \ell_{n_0}$ donc

$$(***) \qquad \exists r > 0\ \forall x \in A \quad \|x - a\|_E < r \Rightarrow \|f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}\|_F < \frac{\epsilon}{3}$$

Finalement en regroupant $(**)$ et $(***)$ on obtient

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}\ \exists r > 0\ \forall x \in A \quad \|x - a\|_E < r \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Ce qui veut exactement dire $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

— Revenons maintenant à l'existence de ℓ. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $(\mathcal{B}(A, F), \|\ \|_\infty)$, elle est donc bornée. Il existe donc M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \|f_n\|_\infty \leq M,$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in A\ \|f_n(x)\| \leq M.$$

La norme étant continue car 1-lipschitzienne, on peut faire tendre x vers a. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \|\ell_n)\| \leq M.$$

La suite $(\ell_n)_{n\geq 0}$ est donc bornée. La démonstration précédente, appliquée à une suite extraite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ quelconque telle que $(\ell_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ converge, montre que la seule valeur d'adhérence de la suite $(\ell_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ est $\lim_{x\to a} f(x)$.
La suite $(\ell_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ est une suite bornée d'éléments d'un espace vectoriel de dimension finie ne possédant qu'une valeur d'adhérence. Elle est donc bien convergente.

Théorème 6.3 *Si une suite d'applications continues sur une partie A d'un e.v.n. E, à valeurs dans un e.v.n. F, converge uniformément vers une fonction f, alors f est continue sur A.*

La continuité étant une notion locale, pour que la limite simple d'une suite de fonction continues sur A soit continue sur A il suffit qu'elle converge uniformément au voisinage de tout point de A, c'est à dire que pour tout point a de A il existe un voisinage V_a sur lequel la convergence est uniforme.

Dans la pratique on prouvera la convergence unforme de la suite sur un ensemble de parties dont on peut pour tout point extraire un voisinage. Par exemple pour $\mathbb{R}$ on montrera la convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[-A, A]$; pour $\mathbb{R}^{*+}$ sur tout intervalle de la forme $[a, b]$, $0 < a < b$, ou tout intervalle $[a, +\infty[$, 0<a ; pour $]0, 2\pi[$ sur tout intervalle $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, $\alpha \in]0, \pi[$; sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ sur tout intervalle $[a, b]$ contenu dans un $]n, n + 1[$, n parcourant $\mathbb{Z}$, etc...

6.1.2 Applications aux séries de fonctions

Définition 6.3 *La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ définies sur X converge simplement sur X si et seulement si pour tout x de X la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge. La limite de cette série de fonctions est alors la fonction*

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Définition 6.4 *La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ si et seulement la suite de fonctions $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, c'est-à-dire si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right\| = 0.$$

Proposition 6.1 *La série de fonctions bornées $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ si et seulement si elle converge dans $\mathcal{B}(X, F)$, muni de la norme de la convergence uniforme.*

Remarque 6.3 *On remarquera que si une série de fonctions σf_n converge uniformément vers une fonction S, alors pour tout n $S_n - S$ est bornée, donc $f_{n+1} = (S_{n+1} - f) - (S_n - f)$ est bornée. Donc toutes les f_n, $n \geq 1$ sont bornées. Cest pourquoi, lorsqu'on étudie la convergence uniforme d'une série de fonctions on peut supposer que toutes les fonctions sont bornées sur le domaine d'étude. Ce que nous ferons par la suite.*

Définition 6.5 *Une série de fonctions absolument convergente pour la norme de la convergence uniforme est dite normalement convergente.*

Proposition 6.2 *Pour qu'une suite de fonctions, définies sur X, à valeurs dans un espace vectoriel normé, soit normalement convergente il faut et il suffit qu'il existe une série $\sum_{n\geq 0} u_n$, à termes positifs et convergente, telle que*

$$\forall x \in X \quad \|f_n(x)\| \leq u_n.$$

L'intérêt de la notion de convergence normale est dans le théorème suivant :

Théorème 6.4 *Si une série de fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie converge normalement alors elle converge uniformément.*

Théorème 6.5 (Permutation des limites pour les séries) *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série d'applications définies sur une partie A d'un e.v.n. E, à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie F (exemple $\mathbb{K}$). On suppose que cette suite converge uniformément sur A. Si a est adhérent à A, si chaque application f_n à une limite en a, notée ℓ_n, alors la série $\sum_{n\geq 0} \ell_n$ converge et on a :*

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Théorème 6.6 (Continuité de la somme d'une série de fonctions) *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série d'applications définies et continues sur une partie A d'un e.v.n. E, à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie F (exemple $\mathbb{K}$). Si cette série converge uniformément sur A sa somme est continue sur A.*

Remarque 6.4 *Comme pour les suites de fonctions, la convergence uniforme au voisinage de tout point, ou sur tout élément d'un système fondamental de voisinages, est suffisante. Dans la pratique c'est l'outil que nous utiliserons le plus souvent.*

Remarque 6.5 *Cela est certes regrettable, mais une suite uniformément convergente de fonctions continues par morceaux ne converge pas vers une fonction continue par morceaux. Or l'intégrale telle qu'elle est définie au programme n'est censée pourvoir s'appliquer qu'aux fonctions continues par morceaux. C'est pourquoi, notre seul outil étant la convergence uniforme (à la rigueur la convergence uniforme locale), nous n'aurons affaire qu'à des suites de fonctions continues.*

Exemple 6.1 (Définition et continuité de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$)

Exemple 6.2 (Définition, continuité et dérivabilité de l'exponentielle complexe)

6.2 Intégration et dérivation

Dans toute cette section nous ne préciserons pas l'espace d'arrivée. Les démonstrations seront faites pour des fonctions à valeurs complexes. On verra plus tard que ces résultats sont valables pour des fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie, dès l'instant où on a généralisé à ces espaces les notions de dérivation et d'intégration.

Théorème 6.7 (Intégration de la limite d'une suite de fonctions) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers f sur tout segment de I. Soit a un point de I alors :*

$$\forall x \in I \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt.$$

Les intégrales ont bien un sens car chaque f_n est continue, et f est limite uniforme sur tout segemnt d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue.

Ce théorème contient le théorème suivant. Il lui est même équivalent en remplaçant le couple (a, b) du nouvel énoncé par le couple $(\min(a, x), \max(a, x))$ dans l'ancien énoncé.

Théorème 6.8 (Intégration sur un segment de la limite) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt.$$

On peut transporter ces deux théorèmes dans la théorie des séries :

Théorème 6.9 (Intégration de la somme d'une série) *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que cette série converge uniformément sur tout segment de I. Soit a un point de I alors :*

$$\forall x \in I \qquad \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt.$$

Théorème 6.10 (Intégration de la somme d'une série) *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions continues définies sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que cette série converge uniformément sur $[a, b]$. Alors :*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Théorème 6.11 (Dérivation de la limite d'une suite de fonctions) *Si une suite f_n de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point vérifie les trois conditions :*

- *La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers f.*
- *Chaque f_n, $n \geq 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
- *La suite $(f_n')_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I.*

Alors :

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$, au sens de la convergence simple sur I (et même de la convergence uniforme sur tout segment contenu dans I).

Le transport de ce théorème au séries conduit au

Théorème 6.12 (Dérivation de la somme d'une série de fonctions) *Si une série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point vérifie les trois conditions :*

- *La suite $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers S.*
- *Chaque f_n, $n \geq 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
- *La série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I.*

Alors :

S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$, au sens de la convergence simple sur I (et même de la convergence uniforme sur tout segment contenu dans I).

6.3 Exemples classiques d'application des théorèmes précédents

Les résultats développés dans cette section ne font pas partie du cours, mais il permettent d'illustrer sur des exemples célèbres (qui ont servis et servent encore souvent de fil directeur à des sujets de concours). Il faut impérativement savoir les développer.

6.3.1 Etude de la fonction ζ

Nous avons déjà vu apparaître la fonction ζ dans le chapitre sur les séries.

Définition 6.6 *La fonction ζ est définie pour x a priori réel par*

$$\zeta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Elle est définie, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 6.1 *Extension du domaine de la fonction ζ.*
1) Montrer que la fonction ζ est en fait définie sur $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; \mathcal{R}\mathrm{e}(z) > 1\}$.
2) Montrer qu'elle est continue sur Δ.
3) Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ. Si on écrit $z = x + iy$ et si z_0 appartient à Δ, calculer $\frac{\partial \zeta}{\partial x}(z_0)$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial y}(z_0)$. En déduire que

$$\lim_{z \to z_0, z \neq z_0} \frac{\zeta(z) - \zeta(z_0)}{z - z_0}$$

existe (et donner sa valeur). On dit que ζ est dérivable comme fonction de la variable complexe sur Δ, ou holomorphe.

6.3.2 Etude de la fonction ψ

Définition 6.7 *La fonction ψ (note[1]) est définie pour x a priori réel par*

$$\zeta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Elle est définie, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6.2 *Extension du domaine de la fonction ψ.*
1) Montrer que la fonction ψ est en fait définie sur $D = \{z \in \mathbb{C}; \mathcal{R}\mathrm{e}(z) > 0\}$ (Nécessite l'usage de la transformation d'Abel.)
2) Montrer qu'elle est continue sur D.

6.4 Techniques moins classiques

Les résultats suivants sont donnés simplement à titre de perfectionnement. Aucun d'entre eux ne peut être invoqué sans justification, même dans les concours les plus difficiles. Si on vous pose la question ce n'est pour savoir si vous connaissez/devinez la réponse mais si vous connaissez un moyen de la justifier.

6.4.1 Cas où la série des limites au bornes de l'intervalle est divergente

Proposition 6.3 *Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ (on autorise $b = +\infty$). On suppose :*

- *Chaque f_n, $n \geq 0$, est* **positive**.
- *Pour tout $n \geq 0$, f_n possède en b une limite ℓ_n, nécessairement positive.*
- *$\sum_{n \geq 0} \ell_n$ est divergente.*
- *$\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction notée S, nécessairement $s \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.*

Alors :

$$\lim_{x \to b} S(x) = \lim_{x \to b} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = +\infty \left(= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to b} f_n(x) \right)$$

1. Notation non-universelle, on peut aussi utiliser ζ_a (a comme alternée)

6.4.2 Recherche d'un équivalent aux bornes

Lorsqu'on cherche un équivalent simple de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ à l'une des bornes b de son intervalle de convergence, trois cas se présentent le plus souvent :

a) Chaque f_n possède en b un équivalent simple de la forme $c_n\phi(x-b)$, où $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge . On peut alors espérer que l'équivalent de $S(x)$ en b est $\phi(x-b)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.
Pour justifier ce résultat, on écrit $\frac{1}{\psi(x)}S(x) = \sum_{n\geq 0} g_n(x)$, avec $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{\phi(x-b)}$. On essaye d'établir la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 0} g_n$ au voisinage de b. Si tel est le cas il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de permutation des limites pour obtenir le résultat désiré.

b) L'équivalent simple de $f_n(x)$ lorsque x tend vers b n'est pas le terme d'une série convergente. Mais, à x fixé, $f_n(x) = g_x(n)$ où g_x est une fonction continue par morceaux et décroissante. On utilise alors la comparaison avec une intégrale.

c) On a pour tout $n \geq 1$ $f_n(x) = \circ(f_0(x))$. On peut espérer que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \circ f_0(x)$ et dans ce cas on peut espérer prouver $S(x) \sim f_0(x)$ en majorant $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right|$.

Deux autres cas sont dignes d'intérêt

d) Equivalent de la somme d'une série de fonctions dont on a obtenu la convergence grâce au critère de Leibniz. Généralement l'équivalent est $\frac{1}{2}f_0(x)$. la technique employée pour justifier ce résultat est l'adaptation aux séries de fonctions de la technique employée pour obtenir l'équivalent du reste d'une série dont on 'a pu établir la convergence qu'à l'aide du critère de Leibniz.

e) Equivalent en R de la somme d'une série entière à coefficients positifs $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$, lorsque $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ diverge, $a_n \sim b_n$ et on connaît la somme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. On peut alors espérer que $S(x) \sim g(x)$. Ce résultat peut être démontré d'une manière générale (Schéma de la démonstration de Cesàro. Dans la pratique ilpeut être intéressant de remarquer que $a_n = b_n + \mathcal{O}(c_n)$ où la série $\sum_{n\geq 0} c_n R^n$ converge ($c_n \geq 0$). La série $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, R[$, sa somme possède donc une limite en R.

Les exemples Voici dans le désordre les exemples que nous allons (presque tous) étudier. Il serait particilièrement formateur de tenter de les traiter, mieux de rédiger une rédaction précise dans chacun des cas. Le strict minimum, pour un mathématicien qui se respecte, est de savoir auquel des cas précédents chacune de ces questions doit être rattachée. 4est pour permettre cet exercice que les exemples sont donnés dans le désordre.

- Equivalent en $+\infty$ de $\zeta(x) - 1$.
- Equivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.
- Limite en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.
- Equivalent en 1^- de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$.
- Equivalent en 0 de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$
- Equivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$
- Equivalent en 0 de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} nx}$.
- Equivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} nx}$.

Exemple du cas a) Recherchons un équivalent en $+\infty$ de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

On commence par remarquer que, pour $x > 0$ $f_n(x) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3x^2}$. D'après le critère de Riemann S est définie sur $\mathbb{R}^{*+}$. On vérifie de même que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[A, +\infty[$, pour tout $A > 0$. Chaque f_n étant continue sur $[A, +\infty[$, S est continue sur $[A, +\infty[$ pour tout $A > 0$, donc sur $\mathbb{R}^{*+}$. De plus la convergence étant uniforme sur $[1, +\infty[$, par exemple, on peut permuter limite et sommation et par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0.$$

Cette partie standard de l'étude d'une série de fonctions sera négligée dans les exemples qui suivent. Mais ne pas oublier que c'est cette partie-là qui vous assurera une note plancher lors d'un oral.

Recherchons un équivalent de S en $+\infty$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^3}\frac{1}{x^2}.$$

Puisque $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, vers $\zeta(3)$, on peut espérer que

$$S(x) \sim_{x\to+\infty} \zeta(3)\frac{1}{x^2}.$$

Pour justifier cela on écrit

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad x^2 S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n(1+n^2x^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x).$$

D'autre part

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad |g_n(x)| = g_n(x) = \frac{x^2}{n+n^3x^2} \leq \frac{x^2}{n^3x^2} = \frac{1}{n^3}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge. Donc $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, +\infty$. On peut appliquer le théorème de permutation des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3),$$

ce qui dit exactement

$$S(x) \sim_{x\to+\infty} \zeta(3)\frac{1}{x^2}.$$

Exemple du cas b) Déterminons

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}.$$

La première conjecture, puisque pour tout n $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = 0$, serait de proposer 0 comme limite.

Pour cela il serait interessant de voir si on est en présence d'une convergence uniforme, par exemple normale, sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$.

Soit $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$. Une rapide étude de fonction montre que $\sup_{x\in[A,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$, pour $n \geq A$. Il en résulte que $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[A,+\infty[}$ diverge, donc qu'il n'y a pas convergence normale sur $[A, +\infty[$. Ceci ne prouve pas qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[A, +\infty[$, mais c'est assez mauvais signe. On pourrait montrer (exercice) que l'a convergence sur $[A, +\infty[$ n'est pas uniforme. Mais cela n'implique pas que l'on ait pas droit de permuter les limites, la convergence uniforme étant une condition suffisante.

Néanmoins , pour $x > 0$, $f_n(x) = g_x(n)$, avec $g_x(t) = \frac{x}{t^2+x^2}$. g_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc, pour tout entier

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt.$$

Soit $N \geq 2$, en sommant

$$\int_1^{N+1} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_0^N \frac{x}{x^2+t^2}\,dt.$$

$$\arctan\left(\frac{(N+1)}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{x}{x^2+n^2} \leq \arctan\left(\frac{N}{x}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Cette méthode s'applique sans changement à la recherche d'un équivalent en 0 de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

(décomposer $\dfrac{1}{X(1+x^2X^2)}$ en éléments simples) ou de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$$

(pour trouver une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{sh}\, u}$ faire le changement de variable $t = e^u$).

Néanmoins elle ne nous est d'aucun secours si on ne sait pas calculer explicitement l'intégrale apparaissant dans l'encadrement.
Un exemple ultra-classique de cette difficulté est la détermination d'un équivalent de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$$

lorsque x tend vers 1^-.
La technique précédente nécessiterait la détermination d'une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ dont on peut démontrer (théorème de Liouville) qu'elle ne s'exprime pas à l'aide des fonctions élémentaires.
C'est pourquoi la rédaction suivante est à priviligier, même si elle utilise la notion d'intégrale généralisée qui sera vue ultérieurement.

Problème : déterminer, lorsque x tend vers $+\infty$ un équivalent de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4+x^4}.$$

On commence par remarquer qu'à $x > 0$ fixé la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^4+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et décroissante. Donc la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4+x^4}$ est équivalente à la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+x^4}$. L'une ou l'autre se prouve en utilisant le critère de Riemann pour les séries ou pour les intégrales ($\frac{1}{n^4+x^4} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}$, $4 > 1$ ou $g_x(t) \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^4}$, $4 > 1$).
De plus, $\forall x > 0$

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{x^4+t^4} \leq \frac{1}{x^4+n^4} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{x^4+t^2}.$$

On somme jusqu'à N :

$$\int_1^{N+1} \frac{dt}{x^4+t^4} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x^4+n^4} \leq \int_0^{N} \frac{dt}{x^4+t^2}.$$

L'intégrale et la série convergent, on peut donc faire tendre N vers $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{x^4+t^4} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^4+n^4} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^4+t^2}.$$

Dans l'intégrale, on effectue le changement de variable $t = xu$, suggéré par l'homogénéité de la fonction intégrée :

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{xdu}{x^4+x^4u^4} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^4+n^4} \leq \int_0^{+\infty} \frac{xdu}{x^4+x^4u^4},$$

soit :

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} \leq x^3 f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4},$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4},$$

c'est-à-dire :

$$f(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

Exemple du cas c) (*Rédigé par Mathieu Guesmi.*) Equivalent en $+\infty$ de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$

Posons $R(x) = S(x) - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$.
$\forall n \geq 1, \forall x \geq 1,$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} &= \frac{2}{\exp(nx) - \exp(-nx)} \\ &\leq \frac{2}{\exp(nx) - e^{-1}} \\ &\leq \frac{3}{\exp(nx)} \quad \text{car } e^2 \geq 3 \text{ et donc } e^{-1} \leq \tfrac{e^{nx}}{3} \end{aligned}$$

Ainsi $R(x) = \circ\left(\frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\right)$ car $\forall x \geq 1,\ R(x) \geq 0$ et

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{\exp(nx)} \\ &\leq \frac{3\exp(-2x)}{1-\exp(-x)} \quad \text{(série géométrique)} \end{aligned}$$

Aussi, $S(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} + \circ(\frac{1}{\mathrm{sh}(x)})$ donc $S(x) \sim \frac{2}{\exp(x)}$.

Autre exemple du cas c) (*Rédigé par Mathieu Guesmi.*) Equivalent en $+\infty$ de $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) - 1$

On considère $R(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

$$\forall x \geq 2, n \geq 3, \left|\left(\frac{2}{n}\right)^x\right| \leq \frac{4}{n^2}$$

et $\sum \frac{4}{n^2}$ converge (Riemann), donc il y a convergence normale donc uniforme de $\sum_{n\geq 3} \left(\frac{2}{n}\right)^x$ sur $[2, +\infty[$.

Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x R(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 0$$

Ainsi $R(x) = \circ\left(\frac{1}{2^x}\right)$ et $\zeta(x) - 1 \sim \frac{1}{2^x}$

Exemple du cas d) (*Rédigé par Mathieu Guesmi.*) Equivalent en $+\infty$ de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.

On remarque que $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{1+x} - \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2p+x} - \frac{1}{2p+1+x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2+2p+(4p+1)x+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x} - R(x) \end{aligned}$$

Soit $x \geq 0$, posons :

$$\begin{aligned} f_x \quad : \quad [1,+\infty[\quad &\to \quad \mathbb{R} \\ t \quad &\mapsto \quad \frac{1}{4t^2+2t+(4t+1)x+x^2} \end{aligned}$$

f_x est continue, décroissante et à valeurs positives. Les existences de $R(x)$ et $\int_1^{+\infty} f_x(t)dt$ sont donc équivalentes (Justifiables l'une ou l'autre à l'aide de la règle deRiemann).
De plus, $\forall N \geq 1$,

$$\int_1^N f_x(t)dt + f_x(N) \quad \leq \quad \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2+2p+(4p+1)x+x^2} \leq \int_1^N f_x(t)dt + f_x(1)$$

donc en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} f_x(t)dt \leq R(x) \leq \int_1^{+\infty} f_x(t)dt + f_x(1)$$

Or

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f_x(t)dt &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{4t^2+2t+(4t+1)x+x^2}dt \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t+x} - \frac{1}{2t+1+x}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}[\ln(2t+x) - \ln(2t+1+x)]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2t+x}{2t+1+x}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2}(\ln(3+x) - \ln(2+x)) \\ &= \frac{1}{2}(\ln(1+\frac{3}{x}) - \ln(1+\frac{2}{x})) \\ &= \frac{1}{2x} + \circ_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

De plus, $f_x(1) = \frac{1}{6+5x+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$
donc $S(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$

Ainsi,

$$S(x) \quad \sim \quad \frac{1}{2x}$$

Exemple du cas e) (*Rédigé par Mathieu Guesmi.*) Equivalent en 1^- de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n})x^n$.

Soit $x \in]-1, 1[$.
Posons $\forall n \geq 1, a_n = \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$. Alors $a_n = O(\frac{1}{n^2})$
Or les séries $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}x^n$ convergent absolument car
- $a_n x^n = O(\frac{1}{n^2})$ car $|x| < 1$,
- $\forall n \geq 1, \frac{1}{n^2} \geq 0$ et
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann).

(De même pour $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}x^n$.)

Par conséquent,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= -\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

Montrons que $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ existe.
- $\forall n \geq 1, x \in]-1, 1[, |a_n x^n| \leq |a_n| = \alpha_n$ et $\sum_{n\geq 1} \alpha_n$ converge car $a_n = O(\frac{1}{n^2})$
  Par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur $]-1, 1[$
- $\forall n \geq 1, \lim_{x\to 1^-} a_n x^n = a_n$ existe

Donc la limite existe (et on peut permuter somme et limite mais cela nous ne intéresse pas). Or $x \to -\ln(1-x)$ diverge en 1^- vers $+\infty$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n})x^n \sim_{1^-} -\ln(1-x)$$

6.5 Approximation des fonctions d'une variable réelle

6.5.1 Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier.

Définition 6.8 *Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une subdivision de I est une suite $(a_0, \ldots, a_n)$ telle que*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_i < a_{i+1} < \cdots < a_n = b.$$

On peut introduire une relation d'ordre sur l'ensemble des subdivisions du segment $[a, b]$. On dira qu'une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ est plus fine que $\sigma' = (b_0, \ldots, b_p)$ si et seulement si $\{b_0, \ldots, b_p\} \subset \{a_0, \ldots, a_n\}$. On écrira $\sigma' \leq \sigma$. Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions de $[a, b]$ il existe au moins une subdivision de $[a, b]$ plus fine que σ et que σ' (réordonner les points de la réunion des points de σ_1 et de σ_2).

Définition 6.9 *Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, une application f de I vers un espace vectoriel normé est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de I telle que f soit constante sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$. On dit alors que σ est associée (ou adaptée) à f.*

Si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et si σ est une subdivision qui lui est adaptée alors toute subdivision plus fine que σ lui est aussi adaptée. On en déduit sans difficulté le résultat suivant.

Proposition 6.4 *L'ensemble des fonctions en escalier sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], E)$.*

Définition 6.10 *Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, une application f, de I vers un espace vectoriel normé, est continue par morceaux si et seulement si il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de I telle que : pour tout i avec $0 \leq i \leq n-1$ f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admet une limite à gauche en a_{i+1} ainsi qu'une limite à droite en a_i.*

Proposition 6.5 *L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I est un espace vectoriel.*

Théorème 6.13 *Toute fonction continue par morceaux est limite uniforme de fonctions en escalier.*

6.5.2 Approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions polynômes.

Théorème 6.14 (Théorème de Weierstrass) *Toute fonction continue sur un segment* $[a, b]$*, à valeurs complexes est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

La démonstration de ce résultat est hors-programme.

Démonstration : j'ai retenu la démonstration par les polynômes de Berstein(note [2]), car étant par son essence probabiliste c'est la plus proche des contenus des programmes actuels.

2. Sergueï Natanovich BERNSTEIN, Odessa 1880-Moscou 1968. Connu aussi pour son théorème sur les fonctions absolument monotones, c'est -à-dire les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont positives. Je découvre au moment où je rédige ce cours, grâce à l'ouvrage « Des mathématiciens de A à Z »de Bertrand HAUCHECORNE et Daniel SURATEAU, qu'il n'a rien avoir avec Félix BERNSTEIN (Halle 1878-1956) dont le nom est associé au théorème de Cantor-Bernstein, un de mes théorèmes favoris, qui affirme que s'il existe une injection de E vers F et une injection de F vers E, alors il existe une bijection de E sur F.