Si $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ le rang de M est :

- le nombre de colonnes non nulles lorsqu'on l'échelonne en colonnes
- le nombre de lignes non nulles lorsqu'on l'échelonne en lignes
- la dimension maximale d'une matrice carrée inversible extraite
- la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes
- la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes
- le r tel que $M = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ où P et Q sont inversibles
- le rang de toute application linéaire dont elle est la matrice dans un couple de bases
- en particulier le rang de

$$\begin{array}{cccc} \Phi_M & : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ & & X & \mapsto & MX \end{array}$$

Si E est de dimension finie :

F et G sont des sous-expaces vectoriels

$$F = G \iff \Big(F \subset G \text{ et } \dim\ F = \dim\ G\Big)$$

Si E et F sont de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$:

$\dim\ E = \mathrm{rg}\,(u)\ + \dim \mathrm{Ker}\ u$ (théorème du rang)

- $F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}$
- $u \in \mathcal{L}(E,F),\ u(E)\ =\ Im\ u\ = \{u(x), x \in E\}\ = \{y \in E, \exists x \in E, y = u(x)\}$
- $u(F + G) = u(F)\ +\ u(G)$
- $u(F \oplus G) = u(F)\ +\ u(G)$
- $\mathrm{Ker}\,(uv) \supset \mathrm{Ker}\ \ v$, $\mathrm{Ker}\,(uv) = v^{-1}(\mathrm{Ker}\ \ u)$
- $\mathrm{Im}\ uv \subset \mathrm{Im}\ u$, $\mathrm{Im}\ uv = u(\mathrm{Im}\ v)$

$u \in \mathcal{L}(E,F)$

E' un sous-espace vectoriel de E

$$\begin{array}{cccc} u_{|E'} & : & E' & \to & F \\ & & x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

$\mathrm{Ker}\,(u_{|E'}) = E' \cap Ker\ u$

$\dim(u(F)) \leq \dim\ F$

$(u + v)(F) \subset (u(F) + v(F))$

$F_1, ..., F_p$ sous-espaces vectoriels sont en somme directe ssi :

- $\forall (a_1, ..., a_p) \in F_1 \times ... \times F_p, \qquad \sum_{i=1}^{p} a_i = 0 \Rightarrow \forall i\ a_i = 0$
- $\forall i \quad F_i \cap \sum_{k \neq i} F_k\ = \{0\}$
- $\forall i \quad F_i \cap \sum_{k < i} F_k\ = \{0\}$

Cas de 2 sous-espaces :

$$F \cap G = \{0\}$$

Cas de 3 sous-espaces :

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } H \cap (F + G) = \{0\}$$