ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2017 FILIÈRE MPI

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES - D - (U)

Corrigé par Erwan Biland et Denis Pétrequin

Question préliminaire

Montrer que si f est monotone par morceaux, alors $f^{\circ n}$ l'est aussi.

Soit $f : I \to I$ une fonction monotone par morceaux. Notons $\mathcal{C}'_f$ l'ensemble des points critiques de f, auxquels on ajoute les extrémités de l'intervalle I si celle-ci sont strictes. Comme l'ensemble $\mathcal{C}_f$ est fini et de cardinal au moins 2, on peut noter $\mathcal{C}'_f = \{a_0, ..., a_k\}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 < ... < a_k$.

Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, comme la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, elle prend la valeur c au plus une fois sur cet intervalle. Par conséquent, la fonction f prend la valeur c un nombre fini de fois : au plus k fois sur les intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, et $k+1$ fois en les points a_i pour $i \in [\![0, n]\!]$. Plus généralement, si C est une partie finie de $\mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(C)$ est finie, car réunion finie de parties finies.

Soit maintenant $J =]c, d[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, comme la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, l'intersection $K_i =]a_{i-1}, a_i[\cap f^{-1}(J)$ est un intervalle : si $a_{i-1} < x < y < z < a_i$ et $f(x)$, $f(y)$ sont dans J, alors $f(z)$ est dans l'intervalle J car il est compris entre $f(x)$ et $f(y)$.

Soit maintenant $g : I \to I$ une autre fonction monotone par morceaux ; notons $\mathcal{C}'_g = \{b_0, ..., b_\ell\}$ avec $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $b_0 < ... < b_\ell$. Notons $D = f^{-1}(\mathcal{C}'_g)$; on a montré que D est une partie finie de I. Pour $i \in [\![1, k]\!]$ et $j \in [\![1, \ell]\!]$, notons $K_{i,j} =]a_{i-1}, a_i[\cap f^{-1}(\,]b_{j-1}, b_j[\,)$. On a montré que les $K_{i,j}$ sont des intervalles ; notons E l'ensemble des extrémités des $K_{i,j}$ qui sont non vides. Alors l'ensemble $C = I \cap (D \cup E)$ est une partie finie de I (notons que E pourrait contenir une extrémité stricte de I). Notons enfin $K^\circ_{i,j}$ l'intérieur de l'intervalle $K_{i,j}$.

L'intervalle I est alors la réunion disjointe de l'ensemble fini C et des intervalles ouverts $K^\circ_{i,j}$, pour $i \in [\![1, k]\!]$ et $j \in [\![1, \ell]\!]$ (ces intervalles étant éventuellement vides, mais toujours deux à deux disjoints). Les $K^\circ_{i,j}$ sont donc les composantes connexes de l'ensemble $I \setminus C$. De plus, f est strictement monotone sur $]a_{i-1}, a_i[$, et g est strictement monotone sur $]b_{j-1}, b_j[$, donc $g \circ f$ est strictement monotone sur l'intervalle $K^\circ_{i,j}$. Ceci prouve que $g \circ f$ est une fonction monotone par morceaux.

La composée de deux fonctions monotones par morceaux est donc monotone par morceaux. Par ailleurs, la fonction identité de I, c'est-à-dire $f^{\circ 0}$, est strictement croissante donc monotone par morceaux. Il s'ensuit immédiatement, par récurrence, que $f^{\circ n}$ est monotone par morceaux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie I

1. On suppose $c = 0$. Exprimer x_n en fonction de n. Déterminer K_0 ainsi que la limite de la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ en fonction de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Par récurrence, on a $x_n = |x_0|^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si $|x_0| > 1$, alors $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, donc $x_0 \notin K_0$. Si $|x_0| \leqslant 1$, alors $|x_n| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $x_0 \in K_0$. Ainsi $K_0 = [-1, 1]$.

2. Déterminer les points fixes de f_c en fonction de $c \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_c(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x + c = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1 - 4c$. Donc, si $c < 1/4$, la fonction f_c possède les deux points fixes $\alpha_c = (1 - \sqrt{1 - 4c})/2$ et $\beta_c = (1 + \sqrt{1 - 4c})/2$. Si $c = 1/4$, la fonction f_c possède l'unique point fixe $1/2$. Si $c > 1/4$, la fonction f_c ne possède aucun point fixe.

3. On suppose $c > 1/4$. Montrer que $K_c = \emptyset$.

Si $c > 1/4$, alors $\Delta = 1 - 4c < 0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 - x + c > 0$, c'est-à-dire $f_c(x) > x$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f_c(x_n) > x_n$ donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Si elle admettait une limite finie ℓ, par continuité de f_c en ℓ, on aurait $f_c(\ell) = \ell$, ce qui est impossible d'après la question précédente. Donc, par le théorème de la limite monotone, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Ainsi $K_0 = \emptyset$.

4. Lorsque $c \in [-2, 1/4]$, montrer que $K_c = [-\beta_c, \beta_c]$.

Supposons $c \leqslant 1/4$. La fonction f_c est alors continue et croissante sur $[0, \beta_c]$. Par parité, on en déduit $f_c([-\beta_c, \beta_c]) = [f(0), f(\beta_c)] = [c, \beta_c]$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} [-\beta_c, \beta_c] \text{ est stable par } f_c & \Leftrightarrow & c \geqslant -\beta_c \\ & \Leftrightarrow & 2c \geqslant -1 - \sqrt{1-4c} \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{1-4c} \geqslant -1-2c \\ & \Leftrightarrow & -1-2c < 0 \text{ ou } 1-4c \geqslant (-1-2c)^2 \\ & \Leftrightarrow & c > -1/2 \text{ ou } 0 \geqslant 4c(c+2) \\ & \Leftrightarrow & c \geqslant -2. \end{array}$$

Supposons $c \in [-2, 1/4]$. Si $x_0 \in [-\beta_c, \beta_c]$, alors par récurrence $x_n \in [-\beta_c, \beta_c]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $x_0 \in K_c$. De plus, pour tout $x > \beta_c$, on a $f_c(x) > x$. Donc, si $x_0 > \beta_c$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et de limite $+\infty$, comme à la question précédente ; donc $x_0 \notin K_c$. Si $x_0 < -\beta_c$, alors par parité $x_1 = f_c(x_0) > \beta_c$, donc on se ramène à la situation précédente et $x_0 \notin K_c$.

Ainsi, pour $c \in [-2, 1/4]$, on a prouvé que $K_c = [-\beta_c, \beta_c]$.

5. (a) On suppose $c < -2$. Montrer que $K_c = \bigcap_{n\geqslant 0} f_c^{-n}\big([-\beta_c, \beta_c]\big)$ est un compact non vide.

Si $x_0 \in \bigcap_{n\geqslant 0} f_c^{-n}\big([-\beta_c, \beta_c]\big)$, alors, par définition, on a $x_n \in [-\beta_c, \beta_c]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $x_0 \in K_c$. Si $x_0 \notin \bigcap_{n\geqslant 0} f_c^{-n}\big([-\beta_c, \beta_c]\big)$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \notin [-\beta_c, \beta_c]$, donc $x_{n_0+1} = f_c(x_{n_0}) > \beta_c$. Alors, comme à la question 3, la suite $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement croissante et de limite $+\infty$, donc $x_0 \notin K_c$. On a ainsi prouvé l'égalité demandée.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_c^{-n}([-\beta_c, \beta_c])$ est l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une fonction continue. Donc K_c, intersection de fermés, est un fermé de $\mathbb{R}$. De plus, $K_c \subset f^{-0}([-\beta_c, \beta, c]) = [-\beta_c, \beta_c]$, donc K_c est borné. Ainsi K_c est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, donc un compact.

Enfin $\beta_c \in K_c$, donc K_c est non vide.

5. (b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, f_c est strictement monotone sur le segment (a_n, b_n).

Commençons par remarquer que $f_c(K_c) \subset K_c$. En effet, si $x_0 \in K_c$, notons $x'_0 = f_c(x_0) = x_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x'_n = f_c^n(x'_0) = x_{n+1}$; la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc la suite extraite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi, donc $x'_0 \in K_c$.

Si $[a, b] \subset K_c$, alors $f_c([a, b]) \subset K_c$ d'après ce qui précède. Or la fonction f_c est continue, donc le segment d'extrémités $f(a), f(b)$ est contenu dans l'image directe $f_c([a, b])$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, par récurrence, on obtient $(a_n, b_n) \subset K_c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, $c < -2$. Donc, comme on l'a montré par équivalences à la question 4, $f_c(0) = c < -\beta_c$. Donc $0 \notin f_c^{-1}([-\beta_c, \beta_c])$, donc $0 \notin K_c$ par la question 5 (a). Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le segment (a_n, b_n) ne contient pas 0 ; il est donc contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$; dans les deux cas, la fonction $f_c : x \mapsto x^2 + c$ est strictement monotone sur $(a_n; b_n)$.

5. (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_c est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme $c < -\beta_c$, on a $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset K_c \subset [-\beta_c, \beta_c] \subset]c, -c[$, donc la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{1 - x^2/c^2}$ est continue sur le segment (a_{n+1}, b_{n+1}). On peut alors effectuer, dans l'intégrale définissant L_{n+1}, le changement de variable $x = f_c(t) = t^2 + c$:

$$L_{n+1} = \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(t^2+c)^2/c^2}} \right| = 2 \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{\sqrt{t^2}\ \mathrm{d}t}{\sqrt{-t^2/c - t^4/c^2}} \right| = 2 \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-1/c - t^2/c^2}} \right|.$$

Remarquons que le terme sous la racine carrée dans la dernière expression reste strictement positif, puisqu'il est issu du changement de variable et de la simplification par t^2. De plus, on a $c < -2 \leqslant -1$ donc $-1/c \geqslant 1$ et $\sqrt{-1/c - t^2/c^2} \geqslant \sqrt{1 - t^2/c^2}$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ et croissance de l'intégrale, on obtient enfin $L_{n+1} \geqslant 2L_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(a_n, b_n) \subset K_n \subset [-\beta_c, \beta_c]$. Donc, par relation de Chasles et positivité de l'intégrale, on a $L_n \leqslant \int_{-\beta_c}^{\beta_c} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2/c^2}}$ (on a vu à la question précédente que cette intégrale existe). La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée ; elle est par ailleurs positive. Si $L_0 \neq 0$, on a par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n \geqslant 2^n L_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$:

contradiction. Donc $L_0 = 0$. Or la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{1 - x^2/c^2}$ est continue et strictement positive sur le segment $[a, b]$, donc celui-ci est de longueur nulle, c'est-à-dire $a = b$.

Partie II

1. Vérifier que f_a est définie et que $f_a(I) = I$.

Soit $a \in [0, 1[$ et $x \in I$, on a $2ax^2 \in [0, 2a]$ d'où $2ax^2 + 1 - a \in [1 - a, 1 + a]$. Comme $a < 1$, on obtient que $2ax^2 + 1 - a > 0$. En particulier, $f(x)$ est défini car le dénominateur n'est pas nul.

On veut maintenant montrer que $|f(x)| \leq 1$ ce qui revient (le dénominateur étant positif) à montrer la double inégalité : $-(2ax^2 + 1 - a) \leq 2x^2 + a - 1 \leq 2ax^2 + 1 - a$.

- Celle de gauche est vraie, car elle est équivalente à $-a \leq 1$
- Celle de droite est aussi vraie, car elle est équivalente à $0 \leq 2(a - 1)(x^2 - 1)$. Cette dernière est vérifiée car $a - 1 \leq 0$ et $x^2 - 1 \leq 0$.

On en déduit que f_a est définie sur I et que $f_a(I) \subset I$.

Maintenant, $f_a(0) = -1$ et $f_a(1) = \dfrac{2 + a - 1}{2a + 1 - a} = \dfrac{a + 1}{a + 1} = 1$. Par continuité de f_a (et comme I est un intervalle) $f_a(I)$ est un intervalle et donc $I \subset f_a(I)$. Finalement, $f(I) = I$.

Remarque : On peut aussi dériver f_a, on en déduit que, pour $x \in I$, $f_a'(x)$ est du signe de $4x(1 - a^2)$ c'est-à-dire du signe de x. Elle est donc (strictement) décroissante sur $[-1, 0]$ et (strictement) croissante sur $[0, 1]$. Le résultat découle alors des valeurs de f et 0 et en ± 1.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\lambda(f_a^{\circ n}) = 2^n$ et que $f_a^{\circ n}$ envoie chaque pli de $f_a^{\circ n}$ sur $]-1, 1[$.

On montre par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $\lambda(f_a^{\circ n}) = 2^n$ et f_a^n envoie chaque pli de $f_a^{\circ n}$ sur $]-1, 1[$.

- Initialisation : Pour $n = 1$. L'étude de la dérivée de la question précédente permet de dire que pour $f_a = f_a^{\circ 1}$, les points critiques sont $-1, 0$ et 1 et qu'il y a deux plis, $]-1, 0[$ et $]0, 1[$. De plus, $f_a(]-1, 0[) = f_a(]0, 1[) =]-1, 1[$.
- Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose que $\lambda(f_a^{\circ n}) = 2^n$ et que $f_a^{\circ n}$ envoie chaque pli de $f_a^{\circ n}$ sur $]-1, 1[$. Notons $\{x_0, \dots, x_p\}$ où $p = 2^n$ les points critiques de $f_a^{\circ n}$ de telle sorte que $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = 1$. Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$, on considère le pli $I_{n,k} =]x_k, x_{k+1}[$. Comme $f_a^{\circ n}(I_{n,k}) =]-1, 1[$, il existe $\alpha_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $f_a^{\circ n}(\alpha_k) = 0$. Comme f_a est strictement monotone sur $]-1, 0[$ et sur $]0, 1[$, $f_a^{\circ n+1} = f_a \circ f_a^{\circ n}$ est strictement monotone sur $]x_k, \alpha_k[$ et $]\alpha_k, x_{k+1}[$ et α_k est un point critique de $f_a^{\circ(n+1)}$. De plus, comme $f_a^{\circ n}$ envoie surjectivement $]x_k, \alpha_k[$ sur $]-1, 0[$ (ou $]0, 1[$) alors $f_a^{\circ(n+1)}$ envoie surjectivement $]x_k, \alpha_k[$ sur $]-1, 1[$. Le raisonnement est identique pour le pli $]x_k, \alpha_{k+1}[$.
  Finalement, $\lambda(f_a^{\circ(n+1)}) = 2^{n+1}$ et $f_a^{\circ(n+1)}$ envoie chaque pli de $f_a^{\circ(n+1)}$ sur $]-1, 1[$.

Par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $\lambda(f_a^{\circ n}) = 2^n$ et f_a^n envoie chaque pli de $f_a^{\circ n}$ sur $]-1, 1[$.

3. (a) On suppose $a = 0$. Montrer que si $x_0 = \cos(t_0) \in I$, alors la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_n = f_0^{\circ n}(x_0)$ vérifie $x_n = \cos(2^n t_0)$ pour tout $n \geq 0$.

Soit $x_0 \in I$. Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 = \cos(t_0)$. Par une récurrence immédiate, on a alors que pour tout entier n, $x_n = \cos(2^n t_0)$ puisque

$$f_0(\cos(2^n t_0)) = 2x_n^2 - 1 = 2\cos^2(2^n t_0) - 1 = \cos(2 \times 2^n t_0) = \cos(2^{n+1} t_0).$$

3. (b) En déduire que l'ensemble des points périodiques de f_0 est dense dans I.

Considérons $A = \{x \in I \mid \exists (k, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = \cos(\frac{2k\pi}{2^m - 1})\}$.

- L'ensemble A est inclus dans l'ensemble des points périodiques de f_0. En effet, pour $x_0 \in A$ et $(k, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $x_0 = \cos(\frac{2k\pi}{2^m - 1})$, on a

$$x_m = \cos\left(2^m \frac{2k\pi}{2^m - 1}\right) = \cos\left((2^m - 1)\frac{2k\pi}{2^m - 1} + \frac{2k\pi}{2^m - 1}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{2^m - 1}\right) = x_0.$$

  Le point x_0 est bien périodique.
- Montrons maintenant que A est dense dans I. Soit $x \in I$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(t)$. Pour tout entier non nul m, on pose $k_m(t) = \lfloor \frac{(2^m - 1)t}{2\pi} \rfloor \in \mathbb{Z}$ où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière. On a alors $\left| k_m(t) - \frac{(2^m - 1)t}{2\pi} \right| \leq 1$ et donc $\left| \frac{2k_m(t)\pi}{2^m - 1} - t \right| \leq \frac{2\pi}{2^m - 1}$. On en déduit que la suite $\left(\frac{2k_m(t)\pi}{2^m - 1}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ tend vers t, et donc, par continuité, la suite $\left(\cos\left(\frac{2k_m(t)\pi}{2^m - 1}\right)\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de A tend vers $x = \cos(t)$.

On a bien montré que A était un ensemble dense dans I qui était inclus dans l'ensemble des points périodiques de f_0 donc ce dernier est aussi dense dans I.

4. On se place de nouveau dans le cas général $a \in [0,1[$. Montrer qu'il existe une unique fonction h_a ...

Posons, $\omega_a : t \mapsto \frac{2\sqrt{1-a^2}}{1+a\cos(2t)} - 2$ qui est une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car $a \in [0,1[$ donc le dénominateur ne s'annule pas. On remarque de plus que ω_a est paire. Posons

$$h_a : x \mapsto \int_0^x \omega_a(t)dt$$

La fonction h_a est alors impaire (car ω_a est paire), définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^\infty$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme ω_a est continue, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h_a'(t) = \omega_a(t)$. Montrons maintenant que h_a est π-périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$h_a(x+\pi) - h_a(x) = \int_x^{x+\pi} \omega_a(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \omega_a(t)dt$$

où l'égalité de droite découle du fait que ω_a étant π-périodique, son intégrale sur une une période est toujours la même. On calcule alors cette intégrale en posant $u = \tan t$ en remarquant que $t \mapsto \tan t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $]-\infty, +\infty[$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \omega_a(t)dt &= -2\pi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{1-a^2}}{1+a(2\cos^2(t)-1)}dt \\
&= -2\pi + 2\sqrt{1-a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+a\left(2\frac{1}{1+u^2}-1\right))} \\
&= -2\pi + 2\sqrt{1-a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2(1-a)+(1+a)} \\
&= -2\pi + 2\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2+\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)^2} \\
&= -2\pi + 2\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}u\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction h_a est bien π-périodique.

Réciproquement, si h_a est impaire et ayant ω_a pour dérivée, cela ne peut être que la fonction définie ci-dessus car elle s'annule en 0.

On pose alors $F_a : t \mapsto 2t + h_a(t)$ qui est donc $\mathscr{C}^\infty$ et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_a'(t) = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{1+a\cos(2t)}$.

On veut maintenant montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $f_a(\cos t) = \cos(F_a(t))$. On remarque que, comme h_a est π-périodique alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_a(t+\pi) = 2(t+\pi) + h_a(t+\pi) = F_a(t) + 2\pi$. De ce fait, $t \mapsto \cos(F_a(t))$ est π-périodique, tout comme $t \mapsto f_a(\cos t)$ puisque f_a est paire. De plus, F_a est impaire et donc $t \mapsto \cos(F_a(t))$ est paire, tout comme $t \mapsto f_a(\cos t)$. Il suffit donc, pour montrer que ces deux fonctions soient les mêmes, de le vérifier sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On considère alors sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, $g_a : t \mapsto \arccos(f_a(\cos t))$ qui est bien définie car $f_a([0,1]) \subset I$. De plus, elle est continue et même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ car arccos est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que, comme $f_a^{-1}(\{\pm 1\}) = \{-1,0,1\}$, $(\frac{\pi}{2})\mathbb{Z} = (f_a \circ \cos)^{-1}(\{\pm 1\})$.

Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, en remarquant que $f_a(\cos t) = \dfrac{2\cos^2 t + a - 1}{2a\cos^2 t + 1 - a} = \dfrac{\cos(2t)+a}{a\cos(2t)+1}$, on a

$$\begin{aligned}
g_a'(t) &= \frac{-2\sin(2t)(a\cos(2t)+1) + 2a\sin(2t)(\cos(2t)+a)}{(a\cos(2t)+1)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\cos(2t)+a}{a\cos(2t)+1}\right)^2}} \\
&= \frac{2(1-a^2)\sin(2t)}{1+a\cos(2t)} \times \frac{1}{\sqrt{(a\cos(2t)+1)^2 - (\cos(2t)+a)^2}} \\
&= \frac{2(1-a^2)\sin(2t)}{1+a\cos(2t)} \times \frac{1}{\sqrt{(1+a)(1-a)(1+\cos(2t))(1-\cos(2t))}} \\
&= \frac{2\sqrt{1-a^2}\sin(2t)}{1+a\cos(2t)} \times \frac{1}{\sqrt{(1-\cos^2(2t))}} \\
&= \frac{2\sqrt{1-a^2}}{1+a\cos(2t)} \times \frac{\sin(2t)}{|\sin(2t)|} = F_a'(t) \text{ car } \sin(2t) > 0.
\end{aligned}$$

De plus, $g_a(0) = \arccos(f_a(1)) = \arccos(1) = 0$ et $F_a(0) = 0$ car F_a impaire. Comme g_a et F_a sont continue, elles coïncident sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sur cet intervalle on a donc que $\cos(F_a(t)) = f_a(\cos t)$ et donc, en utilisant ce qui précède, cette égalité est vraie pour tout t dans $\mathbb{R}$.

5. Montrer que la suite de fonctions $(\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue et croissante $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On pose pour tout entier n, $\Phi_n : t \mapsto \dfrac{1}{2^n} F_a^{\circ n}$ qui est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier N,

$$\Phi_N = \Phi_0 + \sum_{k=0}^{N-1} (\Phi_{k+1} - \Phi_k)$$

où Φ_0 est la fonction identité $x \mapsto x$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$(\Phi_{k+1} - \Phi_k)(t) = \frac{1}{2^{k+1}}(F_a(\Phi_k(t)) - \Phi_k(t)) = \frac{1}{2^{k+1}} h_a(\Phi_k(t))$$

Or la fonction h_a est continue et est donc bornée sur $[0, \pi]$. Comme elle est de plus π-périodique, ce majorant sur $[0, \pi]$ et aussi un majorant sur $\mathbb{R}$. Notons alors $M = \sup_{t\in[0,\pi]} |h_a(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |h_a(t)| = ||h_a||_\infty$. La formule ci-dessus, permet de montrer que $\Phi_{k+1} - \Phi_k$ est bornée et que $||\Phi_{k+1} - \Phi_k||_\infty \leq \dfrac{M}{2^{k+1}}$. On en déduit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} (\Phi_{k+1} - \Phi_k)$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ car la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^{k+1}}$ est convergente (d'après les séries de Riemann). On en déduit que la suite de fonctions (Φ_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

De ce fait, la limite de la suite, notée Φ, est continue car pour tout entier n, Φ_n est continue et que la convergence de la suite est uniforme sur $\mathbb{R}$.

De plus, F_a est croissante (car sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}$) donc, pour tout entier n, Φ_n est aussi croissante. De ce fait, la limite Φ est aussi croissante. En effet, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$, pour tout entier n, $\Phi_n(x) \leq \Phi_n(y)$ et donc, en passant à la limite $\Phi(x) \leq \Phi(y)$.

6. En déduire que pour tout $a \in [0, 1[$, il existe une fonction continue et croissante $\varphi : I \to I$ telle que $f_0 \circ \varphi = \varphi \circ f_a$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. On pose $u = \arccos(t) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a alors

$$f_0(\cos(\Phi_n(u))) = \cos(2\Phi_n(u)) = \cos\left(\frac{F_a^{\circ n}(u)}{2^{n-1}}\right) = \cos\left(\Phi_{n-1}(F_a(u))\right)$$

On a vu que F_a était croissante. De plus, un calcul similaire à celui de la question 4. (en intégrant de 0 à $\frac{\pi}{2}$) donne que $F_a(\frac{\pi}{2}) = \pi$. On peut alors en déduire que $F_a(u) \in [0, \pi]$ et donc $F_a(u) = \arccos(\cos(F_a(u))) = \arccos(f_a(\cos u))$. On en déduit alors que

$$f_0(\cos(\Phi_n(\arccos t))) = \cos(\Phi_{n-1}(\arccos(f_a(t)))$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant la question 5 et la continuité des fonctions cos et arccos on obtient que $f_0(\varphi(t)) = \varphi(f_a(t))$ où $\varphi = \cos \circ \Phi \circ \arccos$. On a bien trouvé une fonction φ continue sur $[0, 1]$ telle que $f_0 \circ \varphi = \varphi \circ f_a$. De plus, arccos est décroissante de $[0, 1]$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, Φ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\Phi(0) = 0$ (car $F_a(0) = 0$) ; $\Phi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ (car $F_a(k\pi) = 2k\pi$ et donc $F_a^{\circ n}(\frac{\pi}{2}) = 2^n \frac{\pi}{2}$) et cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que φ est croissante sur $[0, 1]$ et $\varphi(0) = \cos(\Phi(\frac{\pi}{2})) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

En définissant φ sur $[-1, 0]$ de telle sorte qu'elle soit impaire, on a, pour tout $t \in [-1, 0]$

$$f_0(\varphi(t)) = f_0(-\varphi(-t)) = f_0(\varphi(-t)) = \varphi(f_a(-t)) = \varphi(f_a(t))$$

car f_0 et f_a sont paires.

La fonction φ est continue et croissante sur $[-1, 1]$.

7 . (a) On suppose que $a \in [0, \frac{3}{5}[$. Montrer que $F_a'(t) > 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On a vu que $F_a'(t) = \dfrac{2\sqrt{1-a^2}}{1 + a\cos(2t)}$. On a donc pour $t \in \mathbb{R}$, $\cos(2t) \leq 1$ et donc

$$F_a'(t) \geq \frac{2\sqrt{1-a^2}}{1+a} = 2\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}.$$

Maintenant,

$$2\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} > 1 \iff \frac{1-a}{1+a} > \frac{1}{4} \iff 4 - 4a > 1 + a \iff a < \frac{3}{5}.$$

7. (b) En déduire que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to I$ admettent des applications réciproques continues.

Montrons que Φ est bijective.

— Montrons que Φ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.. Pour tout entier k, $F_a(k\pi) = 2k\pi$ (car $h_a(k\pi) = h_a(0) = 0$) d'où $F_a^{\circ n}(k\pi) = 2^n k\pi$ et donc $\Phi_n(k\pi) = k\pi$. En passant à la limite, $\Phi(k\pi) = k\pi$. Maintenant, pour tout réel x, il existe un entier k tel que $\Phi(k\pi) = k\pi \le x \le (k+1)\pi = \Phi((k+1)\pi)$. Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires car Φ est continue.

— Montrons que Φ est injective. Par l'absurde on suppose qu'il existe x_0 et y_0 distincts tels que $\Phi(x_0) = \Phi(y_0)$. On sait que pour tout x dans $\mathbb{R}$ et tout entier n,

$$2\Phi_n(x) = \Phi_{n-1}(F_a(x))$$

donc en passant à la limite, $2\Phi(x) = \Phi(F_a(x))$. On en déduit que si on pose (x_n) la suite définie par $x_0 = x_0$ et pour tout entier n, $x_{n+1} = F_a(x_n)$ et pareil pour la suite (y_n) alors pour tout entier n, $\Phi(x_n) = \Phi(y_n)$. Cependant, d'après la question 7.a), la dérivée de F_a est strictement supérieure à 1. En particulier, comme elle est continue, il existe $\alpha > 1$ tel que pour tout t dans le compact $[0, \pi]$, $F_a'(t) \ge \alpha$. Cependant, F_a' est π-périodique par construction donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_a'(t) \ge \alpha$. On en déduit, par inégalité des accroissements finis que pour tout entier n, $|x_{n+1} - y_{n+1}| \ge \alpha |x_n - y_n|$ et donc par récurrence, $|x_n - y_n| \ge \alpha^n |x_0 - y_0|$. Ce terme tend donc vers $+\infty$ donc pour n assez grand, $x_n - y_n \ge \pi$. On en déduit (en supposant, par symétrie, que $x_0 > y_0$) que $\Phi(x_n) \ge \Phi(y_n + \pi) = 2\pi + \Phi(y_n)$. Cela contredit que $\Phi(x_n) = \Phi(y_n)$. La fonction Φ est donc injective.

On a bien montré que Φ était une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue. Elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ elle aussi continue. On a vu que φ etait définie sur $[0, 1]$ par

$$[0,1] \xrightarrow{\arccos} [0, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\Phi} [0, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\cos} [0,1]$$

et par

$$[-1,0] \xrightarrow{\times(-1)} [0,1] \xrightarrow{\arccos} [0, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\Phi} [0, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\cos} [0,1] \xrightarrow{\times(-1)} [-1,0]$$

sur $[-1, 0]$. Il suffit donc de lire de droite à gauche pour définir ψ sa bijection réciproque.

7. (b) En déduire que l'ensemble des points périodiques de f_a est dense dans I.

On en déduit que $f_a = \psi \circ f_0 \circ \varphi$, $f_a^{\circ 2} = \psi \circ f_0 \circ \varphi \circ \psi \circ f_0 \circ \varphi = \psi \circ f_0^{\circ 2} \circ \varphi$ et, par récurrence, $f_a^{\circ n} = \psi \circ f_0^{\circ n} \circ \varphi$. Maintenant, x est périodique pour f_a si et seulement s'il existe n tel que

$$f_a^{\circ n}(x) = x \iff \psi \circ f_0^{\circ n} \circ \varphi(x) = x \iff f_0^{\circ n} \circ \varphi(x) = \varphi(x).$$

Cela revient à dire que x est périodique pour f_a si et seulement si $\varphi(x)$ l'est pour f_0. On en déduit que l'ensemble des points périodiques pour f_a est dense dans I. En effet, soit $x \in I$, on considère $\varphi(x)$. Par densité des points périodiques pour f_0 (question 3.b), il existe une suite (u_n) de points périodiques pour f_0 tels que $(u_n) \to \varphi(x)$. Par continuité, $(\psi(u_n)) \to \psi(\varphi(x)) = x$ et pour tout entier n, $\psi(u_n)$ est périodique pour f_a car $u_n = \varphi(\psi(u_n)$ l'est pour f_0.

8. On suppose pour finir que $a \in]\frac{3}{5}, 1[$. Montrer que l'ensemble des points périodiques de f_a n'est pas dense dans I.

On suppose maintenant que $a > \frac{3}{5}$. Cherchons alors les points fixes de f_a.

$$f_a(x) = x \iff 2ax^3 - 2x^2 + (1-a)x - a + 1 = 0 \iff (x-1)(2ax^2 + 2(a-1)x + (a-1)) = 0.$$

On savait que cela pouvait se factoriser par $x - 1$ car $f_a(1) = 1$. On résout donc $2ax^2 + 2(a-1)x + (a-1) = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = (2a-2)^2 - 8a(a-1) = 4(1-a^2) > 0$. Les racines sont alors

$$\alpha = \frac{1 - a + \sqrt{1-a^2}}{2a} \text{ et } \beta = \frac{1 - a - \sqrt{1-a^2}}{2a}$$

Remarquons que α est positif car $1 - a \ge 0$. On en déduit que $\beta < 0$ car d'après les relations coefficients racines, $\alpha.\beta = \dfrac{a-1}{2a^2} < 0$.

De plus $\alpha < 1$, en effet, comme $a > \frac{1}{3}$,

$$\alpha < 1 \iff \sqrt{1-a^2} < 3a - 1 \iff 10a^2 - 6a > 0 \iff 5a - 3 > 0$$

Cette dernière condition est bien vérifiée car $a > \frac{3}{5}$.

Soit $x \in [\alpha, 1]$,

$$f_a(x) - x = \frac{-(2ax^3 - 2x^2 + (1-a)x - a + 1)}{2ax^2 + 1 - a} = -\frac{(x-1) \times 2a(x-\alpha)(x-\beta)}{2ax^2 + 1 - a} \ge 0$$

car $\beta \leq \alpha \leq x \leq 1$.

On en déduit que si $x_0 \in]\alpha, 1[$, la suite (x_n) a tous ses termes compris dans $]\alpha, 1]$. Elle est alors croissante (car $x_{n+1} = f_a(x_n) \geq x_n$). Comme elle est majorée, elle converge. Comme f_a est continue, sa limite est un point fixe de f_a qui ne peut être que 1. Finalement, (x_n) tend vers 1 et ne peut donc par être périodique. Il n'y a aucun point périodique dans l'intervalle $]\alpha, 1[$ donc l'ensemble des points périodiques n'est pas dense.

Partie III

1. Définition de l'entropie $h(f)$.

1. (a) On pose $h_n(f) = \frac{1}{n} \log \lambda(f^{\circ n})$. Montrer que la suite $(h_n(f))_{n \geqslant 1}$ est minorée.

La question préliminaire montre que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $f^{\circ n}$ est monotone par morceaux, donc $\lambda(f^{\circ n})$ est un entier naturel non nul. Ainsi $\lambda(f^{\circ n}) \geqslant 1$, donc $h_n(f) \geqslant 0$. La suite $(h_n(f))_{n \geqslant 1}$ est donc minorée.

1. (b) Montrer que $\lambda(f \circ g) \leqslant \lambda(f)\lambda(g)$.

On reprend les notations de la question préliminaire. L'intervalle I est la réunion disjointe de l'ensemble fini C et des intervalles ouverts $K_{i,j}^\circ$, pour $i \in [\![1, k]\!]$ et $j \in [\![1, \ell]\!]$ (ces intervalles étant éventuellement vides, mais toujours deux à deux disjoints), avec $g \circ f$ strictement monotone sur chacun des intervalles $K_{i,j}^\circ$. L'ensemble C contient donc l'ensemble des points critiques de $g \circ f$, et chacun des $K_{i,j}^\circ$ non vides est contenu dans un unique pli de $g \circ f$. Il existe donc une surjection de l'ensemble des $K_{i,j}^\circ$ non vides (de cardinal au plus $k\ell$) sur l'ensemble des plis de $g \circ f$. Ceci implique $\lambda(g \circ f) \leqslant k\ell = \lambda(f)\lambda(g)$.

En inversant les rôles de f et g, on obtient le résultat demandé.

1. (c) Soit $n \geqslant k \geqslant 1$ deux entiers. Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par k : $n = qk + r$ avec $0 \leqslant r < k$, et donc $q = (n-r)/k$. Alors, d'après la question précédente, comme $f^{\circ n} = \left(f^{\circ k}\right)^{\circ q} \circ f^{\circ r}$, on a $\lambda\left(f^{\circ n}\right) \leqslant \lambda\left(f^{\circ k}\right)^q \lambda(f)^r$. En passant au logarithme,

$$h_n(f) \;=\; \frac{1}{n} \log \lambda\left(f^{\circ n}\right) \;\leqslant\; \frac{q}{n} \log \lambda\left(f^{\circ k}\right) + \frac{r}{n} \log \lambda(f) \;=\; \frac{n-r}{n}\, h_k(f) + \frac{r}{n}\, h_1(f).$$

1. (d) On pose $h(f) = \inf_{n \geqslant 1} h_n(f)$. Montrer que $h(f) = \lim_{n \to +\infty} h_n(f)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $h_k(f) \leqslant h(f) + \varepsilon/2$. D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant k$, il existe $r \in [\![0, k-1]\!]$ tel que $h_n(f) \leqslant \frac{n-r}{n}\, h_k(f) + \frac{r}{n}\, h_1(f)$. On sait que $h_k(f) \geqslant 0$ et $h_1(f) \geqslant 0$, et il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $\frac{k-1}{n_0} h_1(f) \leqslant \varepsilon/2$. Alors, pour tout $n \geqslant \max\{k, n_0\}$, on a

$$h(f) \;\leqslant\; h_n(f) \;\leqslant\; h_k(f) + \frac{k-1}{n}\, h_1(f) \;\leqslant\; h(f) + \varepsilon.$$

Donc $h_n(f) \xrightarrow[n \to \infty]{} h(f)$.

1. (e) Établir que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $h(f) = \frac{1}{n} h\left(f^{\circ n}\right)$.

Par définition, $h(f^{\circ n}) = \inf\limits_{p \geqslant 1} h_p(f^{\circ n}) = \inf\limits_{p \geqslant 1} \left[n\, h_{pn}(f)\right] = n \inf\limits_{x \in n\mathbb{N}^*} h_x(f) \geqslant n\, h(f)$.

Par ailleurs, d'après la question (b) et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda(f^{\circ kn}) \leqslant \lambda(f^{\circ k})^n$, donc $h_k(f^{\circ n}) = \frac{1}{k} \log \lambda(f^{\circ kn}) \leqslant \frac{n}{k} \log \lambda(f^{\circ k}) = n\, h_k(f)$. Par passage à la limite pour $k \to \infty$, on trouve $h(f^{\circ n}) \leqslant n\, h(f)$.

Ainsi, par double inégalité, on a prouvé $h(f) = \dfrac{1}{n}\, h(f^{\circ n})$.

2. Un premier exemple.

2. (a) Montrer qu'il existe un unique réel $c > 0$ tel que $f^{\circ 2}(c) = -c$, avec $f(x) = x^3 - 3c^2 x$.

On a $f(c) = -2c^3$ d'où $f^{\circ 2}(c) = f(-2c^3) = -8c^9 + 6c^5$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{\circ 2}(c) = -c \quad &\Leftrightarrow \quad -8c^9 + 6c^5 = -c \\ &\Leftrightarrow \quad -c(8c^8 - 6c^4 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Le trinôme $8X^2 - 6X - 1$ est de coefficient dominant positif et de coefficient constant négatif, donc il admet une racine $\alpha = \frac{3-\sqrt{17}}{8} < 0$ et une racine $\beta = \frac{3+\sqrt{17}}{8} > 0$. Donc, pour $c > 0$,

$$\begin{aligned} f^{\circ 2}(c) = -c \quad &\Leftrightarrow \quad c = 0 \text{ ou } c^4 = \alpha \text{ ou } c^4 = \beta \\ &\Leftrightarrow \quad c = \sqrt[4]{\beta}, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'existence et l'unicité de c.

2. (b) On pose $I = [f(c), -f(c)]$. Montrer que $f(I) = I$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour x réel on a $f'(x) = 3(x^2 - c^2)$. Donc f est strictement croissante sur $]-\infty, -c]$ et sur $[c, +\infty[$, et strictement décroissante sur $[-c, c]$. Or on a $\beta > \frac{3+\sqrt{16}}{8} = \frac{7}{8} > \frac{1}{4}$, donc $c^2 = \sqrt{\beta} > \frac{1}{2}$, donc $f(c) = -2c^3 < -c$. Ainsi $f(c) < -c < c < -f(c)$ donc, par continuité de f,

$$\begin{array}{rcll} f(I) & = & f([f(c), -c]) \ \cup \ f([-c, c]) \ \cup \ f([c, -f(c)]) & \\ & = & [-c, -f(c)] \ \cup \ [f(c), -f(c)] \ \cup \ [f(c), c] & \quad (\text{car } f^{\circ 2}(c) = -c \text{ et } f \text{ est impaire}) \\ & = & [f(c), -f(c)] \ = \ I & \end{array}$$

2. (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $v_{n+1} = M \cdot v_n$.

Soit $g, h : I \to I$ deux fonctions continues et monotones par morceaux. Soit $x \in I$ un point critique de g. Si x est une extrémité de I, alors c'est aussi un point critique de $h \circ g$. Sinon, comme g est monotone par morceaux, il existe $a < x$ et $b > x$ dans I tels que (par exemple) g est strictement croissante sur $]a, x[$ et strictement décroissante sur $]x, b[$. De plus, g est continue donc elle est strictement croissante sur $[a, x]$ et strictement décroissante sur $[x, b]$. Comme $g(I) \subset I$, on sait alors que $y = g(x)$ n'est pas l'extrémité gauche de l'intervalle I. Comme h est monotone par morceaux, il existe $u < y$ tel que h est strictement monotone sur $]u, y[$ (par exemple strictement croissante). Comme g est continue en x, en notant $\varepsilon = y - u > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in I, \ |t - x| \leqslant \delta \Rightarrow |g(t) - g(x)| < \varepsilon$. Quitte à remplacer les points a et b par $x - \delta$ et $x + \delta$, on peut supposer $g(a) > u$ et $g(b) > u$. Alors $h \circ g$ est strictement croissante sur $]a, x[$ et strictement décroissante sur $]x, b[$, donc x est un point critique de $h \circ g$. Le raisonnement reste valable si h est strictement décroissante sur $]u, y[$. Si on change les sens de variation de g au voisinage de x, il faut choisir $u > y$ tel que h soit monotone sur $[y, u]$, et le résultat final est le même.

Soit maintenant $x \in I$ tel que $g(x)$ soit un point critique de h. Si x est un point critique de g, alors x est un point critique de $h \circ g$. Sinon, il existe $a < x$ et $b > x$ dans I tels que g soit (par exemple) strictement croissante sur $[a, b]$. En particulier, $y = g(x)$ n'est pas une extrémité de I. Comme h est monotone par morceaux et y est un point critique de h, il existe $u < y < v$ tels que h soit (par exemple) strictement croissante sur $]u, y[$ et strictement décroissante sur $]y, v[$. Par continuité de h en y, on montre comme précédemment que $h \circ g$ est strictement croissante au voisinage à gauche de x, et strictement décroissante au voisinage à droite de x, donc x est un point critique de $h \circ g$. En changeant les sens de variation de g et h, on arrive au même résultat.

Enfin, si $x \in I$ n'est pas un point critique de g et si $y = g(x)$ n'est pas un point critique de h, alors g (*resp.* h) est strictement monotone sur un voisinage de x (*resp.* y), donc, par continuité de g, la fonction $h \circ g$ est strictement monotone sur un voisinage de x ; ainsi x n'est pas un point critique de $h \circ g$.

On a donc prouvé que l'ensemble des points critiques de $h \circ g$ est $\mathcal{C}_{h \circ g} = \mathcal{C}_g \ \cup \ g^{-1}(\mathcal{C}_h)$.

En particulier, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $f^{\circ n} = f^{\circ(n-1)} \circ f$; donc $-c$ et c, points critiques de f, sont des points critiques de $f^{\circ n}$. Notons $v_n = (k_1, k_2, k_3)$. Pour $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, la fonction $f^{\circ n}$ possède donc $k_\alpha - 1$ points critiques intérieurs à J_α, auxquels s'ajoutent les deux extrémités de J_α, soit un total $k_\alpha + 1$.

D'après les variations de f étudiées plus haut, on a $f(J_1) = J_2 \cup J_3$, $f(J_2) = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ et $f(J_3) = J_1 \cup J_2$. Ainsi, pour $\beta \in \{1, 2, 3\}$, on a $f(J_\beta) = \bigcup_{\alpha \in \{1,2,3\}\,;\, m_{\alpha,\beta}=1} J_\alpha$. Par le lemme ci-dessus, les points critiques de $f^{\circ(n+1)}$ sur J_β sont les antécédents par f des points critiques de $f^{\circ n}$, auxquels s'ajoutent les points critiques de f, c'est-à-dire les extrémités de J_β (qui sont des antécédents des extrémités de $f(J_\beta)$, et qui sont donc déjà comptés). Or f est continue et strictement monotone, donc bijective, de J_β sur $f(J_\beta)$. Donc le nombre de points critiques de $f^{\circ(n+1)}$ sur J_β est égal au nombre de points critiques de $f^{\circ n}$ sur $f(J_\beta)$, c'est-à-dire, en notant $v_{n+1} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$:

$$\ell_\beta + 1 = \Big[\sum_{\alpha \in \{1,2,3\}\,;\, m_{\alpha,\beta}=1} k_\alpha \Big] + 1$$

(en prenant garde de ne pas compter deux fois les extrémités des J_α).

On a ainsi prouvé que $\ell_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} m_{\alpha,\beta} k_\alpha$, c'est-à-dire que $v_{n+1} = {}^t M \cdot v_n$. Comme la matrice M est symétrique, on a bien le résultat demandé.

2. (d) Déterminer M et les valeurs propres de M.

On a $f(J_1) = J_2 \cup J_3$, $f(J_2) = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ et $f(J_3) = J_1 \cup J_2$, donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et

$$\begin{array}{rcl} \chi_M(X) & = & -\begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \\ & = & -[X^2(1-X) + 2 + 2X - (1-X)] \\ & = & X^3 - X^2 - 3X - 1. \end{array}$$

On remarque que -1 est racine du polynôme χ_M, d'où la factorisation $\chi_M(X) = (X+1)(X^2-2X-1) = (X-\rho)(X-\sigma)(X-\tau)$, avec $\rho = 1+\sqrt{2} \in]2,3[$, $\sigma = 1-\sqrt{2} \in]-1,0[$, et $\tau = -1$.

Les valeurs propres de M sont donc ρ, σ et τ.

2. (e) Montrer que l'entropie de f est $\log\rho$, où ρ est la plus grande valeur propre de M.

On a $M-\rho I = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$, donc le vecteur $u_\rho = (1,\sqrt{2},1)$ est vecteur propre de M pour la valeur propre ρ.

Notons u_σ et u_τ des vecteurs propres de M associés aux valeurs propres σ et τ. La matrice M étant symétrique réelle, la famille $(u_\rho, u_\sigma, u_\tau)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire canonique. On a donc $v_1 = \lambda u_\rho + \mu u_\sigma + \nu u_\tau$, avec $\lambda = \dfrac{\langle u_\rho, v_1\rangle}{\|u_\rho\|^2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$, car $v_1 = (1,1,1)$. En particulier, $\lambda \neq 0$.

Pour $n \geqslant 1$, on obtient $v_n = M^{n-1}v_1 = \rho^{n-1}\lambda u_\rho + \sigma^{n-1}\mu u_\sigma + \tau^{n-1}\nu u_\tau$.

Notons $v_n = (k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, k_3^{(n)})$. Alors, comme $|\rho| > |\sigma| > |\tau|$, on a pour $n \to +\infty$:

$$k_1^{(n)} = \rho^{n-1}\lambda + o(\rho^{n-1}) \qquad ; \qquad k_2^{(n)} = \rho^{n-1}\lambda\sqrt{2} + o(\rho^{n-1}) \qquad ; \qquad k_1^{(n)} = \rho^{n-1}\lambda + o(\rho^{n-1}).$$

Le nombre total de plis de la fonction $f^{\circ n}$ est donc (aucun pli n'étant à cheval entre les J_ρ) :

$$\lambda(f^{\circ n}) \;=\; k_1^{(n)} + k_2^{(n)} + k_3^{(n)} \;=\; \rho^{n-1}\lambda(2+\sqrt{2}) + o(\rho^{n-1}) \;=\; \rho^{n-1}\lambda(2+\sqrt{2}+o(1)),$$

d'où $h_n(f) \;=\; \frac{1}{n}\Big[\log(\rho^{n-1}) + \log\lambda + \log(2+\sqrt{2}+o(1))\Big] \;=\; \frac{1}{n}\Big[n\log\rho + o(n)\Big] \;=\; \log\rho + o(1)$.

Ainsi l'entropie de f est $h(f) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(f) = \log\rho$, avec ρ la plus grande valeur propre de M.

3. Cas des applications tentes.

3. (a) Montrer que la longueur de n'importe quel pli de $f^{\circ n}$ est au plus $|b-a|/p^n$.

Si g et h sont deux applications tentes de pentes respectives p et p', on montre comme à la question préliminaire que la composée $h \circ g$ est une application tente de pente pp'. Par récurrence, il s'ensuit que, pour $n \geqslant 1$, $f^{\circ n}$ est une application tente de pente p^n. Soit $J =]x,y[$ un pli de $f^{\circ n}$. Par continuité, $f^{\circ n}$ est affine de pente $\pm p^n$ sur le segment $[x,y]$, d'où $f^{\circ n}([x,y]) = [f^{\circ n}(x), f^{\circ n}(x) \pm p^n(y-x)]$. Or f stabilise $I = [a,b]$, donc $f^{\circ n}([x,y]) \subset [a,b]$, donc $p^n(y-x) \leqslant b-a$. Le pli $[x,y]$ est donc au plus de longueur $(b-a)/p^n$.

Puisque chaque pli de $f^{\circ n}$ est de longueur au plus $(b-a)/p^n$, il y a au moins p^n plis sur l'intervalle $[a,b]$. Ainsi $h_n(f) = \frac{1}{n}\log\lambda(f^{\circ n}) \geqslant \frac{1}{n}\log(p^n) = p$. Par passage à la limite, $h(f) \geqslant p$.

3. (b) Étant donné un réel $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $a_1 < \dots < a_m$ tels que...

Notons $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ les points critiques de f. Soit $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ (partie entière supérieure), d'où $1/N \leqslant \varepsilon$. Soit $u > 0$ un réel tel que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $u < (x_k - x_{k-1})/N$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, soit $n_k = \lfloor (x_k - x_{k-1})/u \rfloor$ et $v_k = (x_k - x_{k-1})/n_k$. On a donc $n_k \geqslant N$ et $n_k u \leqslant x_k - x_{k-1} < (n_k+1)u$, d'où $u \leqslant v_k < (1+1/n_k)u \leqslant (1+1/N)u \leqslant (1+\varepsilon)u$.

Pour $\ell \in [\![0,n_k]\!]$, soit $b_{k,\ell} = x_{k-1} + \ell v_k$. Notons $\{a_0 < \dots < a_m\} \;=\; \big\{b_{k,\ell}\,;\, k \in [\![1,n]\!],\, \ell \in [\![0,n_k]\!]\big\}$.

Pour $i,j \in [\![0,m-1]\!]$, il existe $k_i, k_j \in [\![1,n]\!]$ tels que $|a_{i+1}-a_i| = v_{k_i}$ et $|a_{j+1}-a_j| = v_{k_j}$.

Donc $|a_{i+1}-a_i| = v_{k_i} \leqslant (1+\varepsilon)u \leqslant (1+\varepsilon)v_{k_j} = (1+\varepsilon)|a_{j+1}-a_j|$.

3. (c) Montrer que $f([a_i,a_{i+1}])$ intersecte au plus $(1+\varepsilon)p+2$ intervalles $[a_j,a_{j+1}]$ et...

Soit $i \in [\![0,n-1]\!]$. L'intervalle $]a_i,a_{i+1}[$ est contenu dans un pli de f, donc, la fonction f est affine de pente $\pm p$ sur $]a_i,a_{i+1}[$, et par continuité sur $[a_i,a_{i+1}]$. Notons $[x,y] = f([a_i,a_{i+1}])$, avec $\{x,y\} = \{f(a_i), f(a_{i+1})\}$. Alors $y-x = p(a_{i+1}-a_i)$. Avec les notations de la question précédente, on a $y-x \leqslant (1+\varepsilon)pu$.

Notons $k = \max\{j \in [\![0,m-1]\!] \mid a_j \leqslant x\}$ et $\ell = \min\{j \in [\![1,m]\!] \mid a_j \geqslant y\}$. On a $a_k \leqslant x < y \leqslant a_\ell$, donc $k < \ell$. Par ailleurs, $x < a_{k+1}$ et $y > a_{\ell-1}$, donc $y-x > a_{\ell-1} - a_{k+1}$. Si $\ell-1 \geqslant k+1$, on en déduit par télescopage $y-x > \sum_{j=k+1}^{\ell-2}(a_{j+1}-a_j)$ et donc, par la question précédente, $y-x \geqslant (\ell-k-2)u$. Si $\ell-1 < k+1$, on a encore $y-x > 0 > (\ell-k-2)u$.

En réunissant les inégalités des deux paragraphes précédents, on a $(\ell-k-2)u \leqslant (1+\varepsilon)pu$. Le nombre d'intervalles $[a_j,a_{j+1}]$ rencontrant $f([a_i,a_{i+1}])$ est donc $\ell-k \leqslant (1+\varepsilon)p+2$.

Pour $i,j \in [\![0,m-1]\!]$, notons $i \to j$ si l'image directe $f([a_i,a_{i+1}])$ intersecte l'intervalle $[a_j,a_{j+1}]$. On a clairement

$[a_i, a_{i+1}] = \bigcup_{j\in[\![0,m-1]\!];\, i\to j}\big([a_i,a_{i+1}]\cap f^{-1}([a_j,a_{j+1}])\big)$. On en déduit, par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, que

$$[a,b] = \bigcup_{\substack{(i_0,\dots,i_n)\in[\![0,m-1]\!]^n\\ i_0\to\dots\to i_n}} \left(\bigcup_{k=0}^{n} f^{-n}([a_{i_k}, a_{i_k+1}])\right)$$

et que la fonction $f^{\circ n}$ est affine de pente $\pm p^n$ sur chacun des intervalles $J_{i_0,\dots,i_n} = \bigcup_{k=0}^{n} f^{-n}([a_{i_k}, a_{i_k+1}])$.

Or, il y a m valeurs possibles pour $i_0 \in [\![0, m-1]\!]$. Et, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et i_k fixés, il existe au plus $(1+\varepsilon)p+2$ valeurs pour i_{k+1} telles que $i_k \to i_{k+1}$. Donc il y a au plus $m[(1+\varepsilon)p+2]^n$ intervalles $J_{i_0,\dots,i_n}$. Comme $f^{\circ n}$ est affine donc strictement monotone sur chacun de ces intervalles, on obtient :

$$\lambda(f^{\circ n}) \leqslant m[(1+\varepsilon)p+2]^n, \qquad \text{d'où} \qquad h_n(f) \leqslant \frac{\log m}{n} + \log[(1+\varepsilon)p+2].$$

Par passage à la limite pour $n \to +\infty$, on a prouvé $h(f) \leqslant \log[(1+\varepsilon)p+2]$.

3. (d) Conclure.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On a prouvé que $f^{\circ n}$ est une application tente de pente p^n. D'après la question précédente, on a donc $h(f^{\circ n}) \leqslant \log[(1+\varepsilon)p^n+2]$. D'après la question III.1.e, on en déduit $h(f) = \dfrac{1}{n}h(f^{\circ n}) \leqslant \dfrac{1}{n}\log[(1+\varepsilon)p^n+2] = \log[(1+\varepsilon)p] + o(1)$.

Par passage à la limite, on obtient $h(f) \leqslant \log[(1+\varepsilon)p] = \log p + \log(1+\varepsilon) \leqslant \log p + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a prouvé $h(f) \leqslant \log p$. L'inégalité inverse ayant été obtenue à la question (a), on peut conclure :

$$h(f) = \log p.$$

Partie IV

1. La série entière $\Theta_x(z)$.

1. (a) Montrer que le rayon de convergence de Θ_x est supérieur ou égal à 1.

Soit $x \in I$. Par définition, pour tout entier n, $\theta_n(x) \in \{-1, 0, 1\}$. En particulier pour $z = 1$, la suite $|\theta_n(x)z^n| = |\theta_n(x)|$ est bornée. On en déduit donc que le rayon de convergence de la série entière Θ_x est supérieur ou égal à 1.

1. (b) Exprimer $\Theta_a(z)$ et $\Theta_b(z)$ sur leurs disques de convergence sous la forme de fractions rationnelles.

Pour tout $i > 0$, $f^{\circ i}(a) = f^{\circ i}(b) = b$ donc $\varepsilon(f^{\circ i}(a)) = \varepsilon(f^{\circ i}(b)) = 1$. Par contre pour $i = 0$, $\varepsilon(f^{\circ 0}(a)) = \varepsilon(a) = -1$ alors que $\varepsilon(f^{\circ 0}(b)) = \varepsilon(b) = 1$. On en déduit que pour tout entier $n \geq 0$, $\theta_n(a) = -1$ et $\theta_n(b) = 1$. On en déduit que $\Theta_a(z) = -\sum_{n\geq 0} z^n$ et $\Theta_b(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$. Elles sont toutes les deux de rayon de convergence 1 et

$$\forall z \in D(0,1), \Theta_a(z) = -\frac{1}{1-z} \text{ et } \Theta_b(z) = \frac{1}{1-z}.$$

où $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ désigne le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1.

1. (c) Monter que $f^{\circ n}$ est monotone sur $[x, y]$, que son sens de variation dépend du signe de $\theta_{n-1}(x) = \theta_{n-1}(y)$, puis que $\theta_n(x) \leq \theta_n(y)$.

Soit x et y tels que $[x, y] \subset I$ et $x \neq y$. On procède par récurrence. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose, $\mathscr{P}(n) =$« si pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_j(x) = \theta_j(y)$ alors $\theta_{n-1}(x) \neq 0$, $f^{\circ n}$ est strictement monotone sur $[x, y]$. Elle est de plus décroissante si $\theta_{n-1}(x) < 0$ et croissante si $\theta_{n-1}(x) > 0$ ».

- Initialisation : Pour $n = 1$, on suppose que $\theta_0(x) = \theta_0(y)$ c'est-à-dire $\varepsilon(x) = \varepsilon(y)$. Comme $x \neq y$, on ne peut pas avoir $\varepsilon(x) = 0$ car cela imposerait $x = y = c_0$. Si $\varepsilon(x) < 0$ (et donc $\varepsilon(y)$ aussi), $[x, y] \subset [a, c_0[$ et donc la fonction $f = f^{\circ 1}$ est bien monotone strictement décroissante sur $[x, y]$. De même si $\varepsilon(x) > 0$ (et donc $\varepsilon(y)$ aussi), $[x, y] \subset]c_0, b]$ et donc la fonction $f = f^{\circ 1}$ est bien monotone strictement croissante sur $[x, y]$.
- Hérédité : Soit n un entier au moins égal à 1. On suppose $\mathscr{P}(n)$ et on veut montrer $\mathscr{P}(n+1)$. On suppose dès lors que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\theta_j(x) = \theta_j(y)$. C'est en particulier vrai pour j dans $[\![0, n-1]\!]$ et donc, d'après $\mathscr{P}(n)$, $\theta_{n-1}(x) \neq 0$, $f^{\circ n}$ est strictement monotone sur $[x, y]$. Elle est de plus décroissante si $\theta_{n-1}(x) < 0$ et croissante si $\theta_{n-1}(x) > 0$.

  Comme $\theta_{n-1}(x) = \theta_{n-1}(y) = 0$ alors $\varepsilon(f^{\circ n}(x)) = \dfrac{\theta_n(x)}{\theta_{n-1}(x)} = \dfrac{\theta_n(y)}{\theta_{n-1}(y)} = \varepsilon(f^{\circ n}(y))$. Comme $f^{\circ n}$ est strictement monotone sur $[x, y]$ et que $x \neq y$ alors $f^{\circ n}(x) \neq f^{\circ n}(y)$. On en déduit, comme dans l'initialisation que $\varepsilon(f^{\circ n}(x)) \neq 0$ et donc $\theta_n(x) \neq 0$. Maintenant, on utilise que $f^{\circ(n+1)} = f \circ f^{\circ n}$.

— Si $\theta_n(x) > 0$ (et donc $f^{\circ n}$ strictement croissante sur $[x, y]$) et que $\varepsilon(f^{\circ n}(x)) < 0$ alors $f^{\circ n}([x, y]) = [f^{\circ n}(x), f^{\circ n}(y)] \subset [a, c_0[$. Comme f est strictement décroissante sur $[a, c_0[$, $f^{\circ(n+1)}$ est strictement décroissante sur $[x, y]$ ce qui est ce que l'on veut car $\theta_n(x) = \theta_n(x).\varepsilon(f^{\circ n}(x)) < 0$.

— Les autres cas sont similaires.

On en déduit par récurrence que le prédicat $\mathscr{P}(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq 1$. La première partie de la question en résulte puisque si $x = y$ alors le résultat est trivial.

Maintenant, soit $n \geq 1$, on suppose que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_j(x) = \theta_j(y)$. En particulier, $\theta_{n-1}(x) = \theta_{n-1}(y)$.

— Si $\theta_{n-1}(x) \leq 0$ alors $f^{\circ n}$ est décroissante donc $f^{\circ n}(x) \geq f^{\circ n}(y)$. Comme ε est croissante, $\varepsilon(f^{\circ n}(x)) \geq \varepsilon(f^{\circ n}(y))$ et donc, en multipliant par $\theta_{n-1}(x) = \theta_{n-1}(y)$ qui est négatif, $\theta_n(x) \leq \theta_n(y)$.

— Si $\theta_{n-1}(x) > 0$ alors $f^{\circ n}$ est croissante donc $f^{\circ n}(x) \leq f^{\circ n}(y)$. Comme ε est croissante, $\varepsilon(f^{\circ n}(x)) \leq \varepsilon(f^{\circ n}(y))$ et donc, en multipliant par $\theta_{n-1}(x) = \theta_{n-1}(y)$ qui est positif, $\theta_n(x) \leq \theta_n(y)$.

1. (d) En déduire que pour tout réel $z \in [0, \frac{1}{2}]$, l'application $x \mapsto \Theta_x(z)$ est croissante sur I.

On considère $z \in [0, \frac{1}{2}]$ et x, y dans I avec $x \leq y$. On veut montrer que $\Theta_y(z) - \Theta_x(z) \geq 0$.

— Si, pour tout entier n, $\theta_n(x) = \theta_n(y)$ alors $\Theta_x(z) = \Theta_y(z)$ et le résultat est vrai.

— S'il existe des entiers n tels que $\theta_n(x) \neq \theta_n(y)$, on note p le plus petit tel entier. On a alors

$$\Theta_y(z) - \Theta_x(z) = z^p \left((\theta_p(y) - \theta_p(x)) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} (\theta_n(y) - \theta_n(x)) z^{n-p} \right).$$

On remarque que, comme, pour tout entier n, $\theta_n(x)$ et $\theta_n(y)$ appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$ alors $\theta_n(y) - \theta_n(x)$ appartient à $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Maintenant, comme $\theta_p(y) - \theta_p(x)$ n'est pas nul par définition de p et est positif d'après la question précédente (les hypothèses de la question 1.(c) sont vérifiées d'après la définition de p), on a $\theta_p(y) - \theta_p(x) \in \{1, 2\}$. Séparons alors deux cas :

— Si $\theta_p(y) - \theta_p(x) = 1$. Cela signifie que $\theta_p(y) = 0$ et dans ce cas, pour tout $n \geq p$, $\theta_n(y) = 0$ ou que $\theta_p(x) = 0$ et dans ce cas, pour tout $n \geq p$, $\theta_n(x) = 0$. Dans les deux cas, on a alors que pour $n \geq p+1$, $|\theta_n(y) - \theta_n(x)| \leq 1$. Cela nous donne, en utilisant que $z \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} (\theta_p(y) - \theta_p(x)) z^{n-p} \right| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} |\theta_p(y) - \theta_p(x)| z^{n-p} \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} z^{n-p} \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} = 1.$$

— Si $\theta_p(y) - \theta_p(x) = 2$, pour $n \geq p+1$, $|\theta_n(y) - \theta_n(x)| \leq 2$ donc en utilisant encore que $z \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} (\theta_p(y) - \theta_p(x)) z^{n-p} \right| \leq 2 \sum_{n=p+1}^{+\infty} |\theta_p(y) - \theta_p(x)| z^{n-p} \leq 2 \sum_{n=p+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} = 2.$$

Finalement, dans les deux cas, $(\theta_p(y) - \theta_p(x)) + \sum_{n=p+1}^{+\infty} (\theta_n(y) - \theta_n(x)) z^{n-p} \geq 0$ et donc $\Theta_y(z) - \Theta_x(z) \geq 0$.

La fonction $x \mapsto \Theta_x(z)$ est bien croissante.

2. Discontinuités de $x \mapsto \Theta_x(z)$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in I$, $\Theta_x = \frac{\Theta_x^- + \Theta_x^+}{2}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $\forall x \in I$, $\theta_n(x) = \dfrac{\theta_n^+(x) + \theta_n^-(x)}{2}$.

— Initialisation : Pour $n = 0$, $\theta_0 = \varepsilon$ et la fonction ε vérifie bien que

$$\varepsilon(x) = \frac{\lim_{y \to x^+} \varepsilon(y) + \lim_{y \to x^-} \varepsilon(y)}{2}.$$

— Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un entier $n \geq 0$. On veut le montrer pour $n+1$. On remarque que pour $y \in I$, $\theta_{n+1}(y) = \theta_n(f(y)).\varepsilon(y)$.

— Si $x < c_0$ alors on peut travailler avec $y \in [a, c_0[$ et donc $\varepsilon(y) = -1$. Comme f est décroissante sur $[a, c_0[$ alors quand y tend vers x par valeurs inférieures, $f(y)$ tend vers $f(x)$ par valeurs supérieures. On en déduit que

$$\lim_{y \to x^-} \theta_n(f(y)) = \theta_n^+(f(x)) \text{ et } \lim_{y \to x^+} \theta_n(f(y)) = \theta_n^-(f(x)).$$

On obtient donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\frac{\theta_{n+1}^+(x) + \theta_{n+1}^-(x)}{2} = -\frac{\theta_n^-(f(x)) + \theta_n^+(f(x))}{2} = -\theta_n(f(x)) = \theta_{n+1}(x).$$

— Le cas $x > c_0$ est similaire.

— Si $x = c_0$, quand y tend vers x par valeurs inférieures ou supérieures, $f(y)$ tend vers $f(x)$ par valeurs supérieures. On en déduit que

$$\lim_{y \to x^-} \theta_n(f(y)) = \lim_{y \to x^+} \theta_n(f(y)) = \theta_n^+(f(x)).$$

De plus, quand y tend vers x par valeurs inférieures, $\varepsilon(y) = -1$ et quand y tend vers x par valeurs supérieures, $\varepsilon(y) = 1$. On obtient alors

$$\frac{\theta_{n+1}^+(x) + \theta_{n+1}^-(x)}{2} = \frac{\theta_n^+(f(x)) - \theta_n^+(f(x))}{2} = 0 = \theta_{n+1}(x).$$

Par récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, $\forall x \in I$, $\theta_n(x) = \dfrac{\theta_n^+(x) + \theta_n^-(x)}{2}$.

On en déduit l'égalité des séries entières : $\Theta_x(z) = \dfrac{\Theta_x^-(z) + \Theta_x^+(z)}{2}$.

2. (b) Montrer que $\Theta_x^- \neq \Theta_x^+$ si et seulement s'il existe $n \geq 0$ tel que $f^{\circ n}(x) = c_0$ et que $\cdots$

On procède par double implication

— $\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée, on montre que si pour tout entier n, $f^{\circ n}(x) \neq c_0$ alors $\Theta_x^+(z) = \Theta_x^-(z)$. En effet, pour tout entier n et tout $i \leq n$, $\lim\limits_{y \to x} \varepsilon(f^{\circ i}(y)) = \varepsilon(f^{\circ i}(x))$ car ε est continue en dehors de c_0. Par produit, $\lim\limits_{y \to x} \theta_n(y) = \theta_n(x)$, c'est-à-dire que θ_n est continue en x. De ce fait, pour tout entier n, $\theta_n^+(x) = \theta_n^-(x)$ et donc $\Theta_x^+ = \Theta_x^-$.

— $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose qu'il existe n tel que $f^{\circ n}(x) = c_0$. On note n_0 le plus petit tel entier. Comme on a vu à la question précédente, pour tout $n < n_0$, θ_n est continue en x, en particulier θ_{n_0-1} est continue et $\theta_{n_0-1}(x) \neq 0$.

— Si $\theta_{n_0-1} = 1$. La fonction $f^{\circ n_0}$ est strictement croissante au voisinage de x, de ce fait quand y tend vers x^+, $f^{\circ n_0}(y)$ tend vers c_0^+ et quand y tend vers x^-, $f^{\circ n_0}(y)$ tend vers c_0^-. On en déduit que

$$\lim_{y \to x^+} \theta_{n_0}(y) - \lim_{y \to x^-} \theta_{n_0}(y) = 2\theta_{n_0-1}(x) \neq 0.$$

— Si $\theta_{n_0-1} = -1$. La fonction $f^{\circ n_0}$ est strictement décroissante au voisinage de x, de ce fait quand y tend vers x^+, $f^{\circ n_0}(y)$ tend vers c_0^- et quand y tend vers x^-, $f^{\circ n_0}(y)$ tend vers c_0^+. On en déduit que

$$\lim_{y \to x^+} \theta_{n_0}(y) - \lim_{y \to x^-} \theta_{n_0}(y) = -2\theta_{n_0-1}(x) \neq 0.$$

On en déduit que $\theta_{n_0}^+(x) \neq \theta_{n_0}^-(x)$. Par unicité de la décomposition en séries entières, $\Theta_x^+ \neq \Theta_x^-$.

Pour finir, si on suppose qu'il existe n tel que $f^{\circ n}(x) = c_0$ et que l'on note n_0 le plus petit tel entier. Soit $z \in D(0,1)$,

$$\begin{aligned}
\Theta_x^+(z) - \Theta_x^-(z) &= \sum_{n<n_0} (\theta_n^+(x) - \theta_n^-(x)) z^n + z^{n_0} \sum_{n \geq n_0} (\theta_n^+(x) - \theta_n^-(x)) z^{n-n_0} \\
&= z^{n_0} \sum_{n \geq n_0} (\theta_n^+(x) - \theta_n^-(x)) z^{n-n_0}
\end{aligned}$$

On remarque alors que pour tout y dans I, et tout $n \geq n_0$, $\theta_n(y) = \theta_{n-n_0}(f^{\circ n_0}(y)).\theta_{n_0-1}(y)$ (avec la convention $\theta_{-1} = 1$). Comme précédemment, par définition de n_0, $\theta_{n_0-1}(x) \neq 0$. Le même raisonnement que ci-dessus, montre que si $\theta_{n_0-1}(x) = 1$

$$\theta_{n-n_0}^+(x) = \lim_{y \to x^+} \theta_{n-n_0}(f^{\circ n_0}(y)) = \theta_{n-n_0}^+(f^{\circ n}(x)) = \theta_{n-n_0}^+(c_0)$$

et que $\theta_{n-n_0}^-(x) = \theta_{n-n_0}^-(c_0)$.

Maintenant, si $\theta_{n_0-1}(x) = -1$

$$\theta_{n-n_0}^+(x) = \lim_{y \to x^-} \theta_{n-n_0}(f^{\circ n_0}(y)) = \theta_{n-n_0}^-(f^{\circ n}(x)) = \theta_{n-n_0}^-(c_0)$$

et que $\theta_{n-n_0}^-(x) = \theta_{n-n_0}^+(c_0)$.

Cela implique que, dans les deux cas, on obtient en multipliant par $\theta_{n_0-1}(x)$ que $\theta_n^+(x) = \theta_{n-n_0}^+(c_0)$ et $\theta_n^-(x) = \theta_{n-n_0}^-(c_0)$.

On en déduit finalement que

$$\Theta_x^+(z) - \Theta_x^-(z) = z^{n_0} \sum_{n \geq n_0} (\theta_{n-0}^+(c_0) - \theta_{n-n_0}^-(c_0)) z^{n-n_0} = z^{n_0} \left(\Theta_{c_0}^+(z) - \Theta_{c_0}^-(z)\right).$$

3. L'invariant Δ_f.

3. (a) Montrer que $\Delta_f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \delta_n.z^n$.

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $\delta_n = \dfrac{1}{2}(\theta_n^+(c_0) - \theta_n^-(c_0))$.

— Initialisation : Pour $n = 0$, $\theta_0^+(c_0) = \lim\limits_{y\to c_0^+} \varepsilon(y) = 1$ et $\theta_0^-(c_0) = \lim\limits_{y\to c_0^-} \varepsilon(y) = -1$. On en déduit que $\delta_0 = 1 = \dfrac{1}{2}(\theta_0^+(c_0) - \theta_0^-(c_0))$ car $f^{\circ 0}(c_0) = c_0$.

— Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose que $\delta_{n-1} = \dfrac{1}{2}(\theta_{n-1}^+(c_0) - \theta_{n-1}^-(c_0))$. On utilise encore que pour tout $y \in I$, $\theta_n(y) = \theta_{n-1}(y)\varepsilon(f^{\circ n}(y))$.

  — Si $f^{\circ n}(c_0) > c_0$, quand on fait tendre y vers c_0^+ alors $\theta_{n-1}(y)$ tend vers $\theta_{n-1}^+(c_0)$ et $\varepsilon(f^{\circ n}(y))$ tend vers $\varepsilon(f^{\circ n}(c_0)) = 1$. Il en va de même quand y tend vers c_0^-. On en déduit que

$$\frac{1}{2}(\theta_n^+(c_0) - \theta_n^-(c_0)) = \frac{1}{2}(\theta_{n-1}^+(c_0) - \theta_{n-1}^-(c_0)) = \delta_{n-1} = \delta_n.$$

  — Si $f^{\circ n}(c_0) < c_0$, quand on fait tendre y vers c_0^+ alors $\theta_{n-1}(y)$ tend vers $\theta_{n-1}^+(c_0)$ et $\varepsilon(f^{\circ n}(y))$ tend vers $\varepsilon(f^{\circ n}(c_0)) = -1$. Il en va de même quand y tend vers c_0^-. On en déduit que

$$\frac{1}{2}(\theta_n^+(c_0) - \theta_n^-(c_0)) = -\frac{1}{2}(\theta_{n-1}^+(c_0) - \theta_{n-1}^-(c_0)) = -\delta_{n-1} = \delta_n.$$

  — Si $f^{\circ n}(c_0) = c_0$ et que $\theta_{n-1}^+(c_0) = 1$. Alors la fonction $f^{\circ n}$ est croissante sur un voisinage de c_0^+. On en déduit que quand y tend vers c_0^+ alors $f^{\circ n}(y)$ tend vers $f^{\circ n}(c_0) = c_0$ par valeurs supérieures et donc $\lim\limits_{y\to c_0^+} \varepsilon(f^{\circ n}(y)) = 1$. Dans ce cas, $\theta_{n-1}^-(c_0) = -1$ et la fonction $f^{\circ n}$ est décroissante sur un voisinage de c_0^-. On en déduit que quand y tend vers c_0^- alors $f^{\circ n}(y)$ tend vers $f^{\circ n}(c_0) = c_0$ par valeurs supérieures et donc $\lim\limits_{y\to c_0^-} \varepsilon(f^{\circ n}(y)) = 1$. Finalement,

$$\theta_n^+(c_0) - \theta_n^-(c_0) = \theta_{n-1}^+(c_0) - \theta_{n-1}^-(c_0) = \delta_{n-1} = 1.$$

  — Si $f^{\circ n}(c_0) = c_0$ et que $\theta_{n-1}^+(c_0) = -1$. Alors la fonction $f^{\circ n}$ est décroissante sur un voisinage de c_0^+. On en déduit que quand y tend vers c_0^+ alors $f^{\circ n}(y)$ tend vers $f^{\circ n}(c_0) = c_0$ par valeurs inférieures et donc $\lim\limits_{y\to c_0^+} \varepsilon(f^{\circ n}(y)) = -1$. Dans ce cas, $\theta_{n-1}^-(c_0) = 1$ et la fonction $f^{\circ n}$ est croissante sur un voisinage de c_0^-. On en déduit que quand y tend vers c_0^- alors $f^{\circ n}(y)$ tend vers $f^{\circ n}(c_0) = c_0$ par valeurs inférieures et donc $\lim\limits_{y\to c_0^-} \varepsilon(f^{\circ n}(y)) = -1$. Finalement,

$$\theta_n^+(c_0) - \theta_n^-(c_0) = -(\theta_{n-1}^+(c_0) - \theta_{n-1}^-(c_0)) = -\delta_{n-1} = 1.$$

On a bien montré que pour tout entier n, $\delta_n = \dfrac{1}{2}(\theta_n^+(c_0) - \theta_n^-(c_0))$. De ce fait, $\Delta_f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \delta_n z^n$.

3. (b) Montrer que $\gamma_n \leq 2^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer que γ_n, le cardinal de $(f^{\circ n})^{-1}(\{c_0\})$ est au plus égal à 2^n. Il suffit de voir que pour $n \geq 1$, $(f^{\circ n})^{-1}(\{c_0\}) = f^{-1}\left((f^{\circ(n-1)})^{-1}(\{c_0\})\right)$. Comme, d'après la définition de f, tout élément de I a au plus deux antécédents (un dans $[a, c_0]$ et un dans $[c_0, b]$), on en déduit que pour tout ensemble fini X, le cardinal de $f^{-1}(X)$ est inférieur à deux fois la cardinal de X. On en déduit que $\gamma_n \leq 2\gamma_{n-1}$. Comme de plus $\gamma_0 = 1$, on montre par récurrence que pour tout entier n, $\gamma_n \leq 2^n$.

3. (c) En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\Gamma_f(z)$ définie par $\Gamma_f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \gamma_n.z^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

D'après ce qui précède, pour $z = \frac{1}{2}$ la suite $(\gamma_n.(\frac{1}{2})^n)$ est bornée car elle est positive et majorée par 1 d'après la question précédente. De ce fait, le rayon de convergence de Γ_f est au moins égal à $\frac{1}{2}$.

3. (d) Établir que l'égalité suivante est valide sur le disque $D(0, \frac{1}{2})$: $\Theta_b - \Theta_a = 2\Delta_f.\Gamma_f$.

Soit $z \in [0, \frac{1}{2}]$. Notons A l'ensemble des points de discontinuité de $x \mapsto \Theta_x(z)$, c'est-à-dire l'ensemble des x de I tels qu'il existe un entier n tel que $f^{\circ n}(x) = c_0$.

Commençons par prouver que $\Theta_x^+(z) = \lim\limits_{y\to x^+} \Theta_y(z)$. En effet, si on pose $u_n : y \mapsto \theta_n(y)z^n$. Comme $||u_n||_{\infty,I} \leq |z|^n$, la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur I car $|z| < \frac{1}{2}$. D'après le théorème de la double limite appliqué à la série de fonction obtenue en prenant la restriction de u_n à $]x,b]$,

$$\lim_{y\to x^+}\Theta_x(z)=\lim_{y\to x^+}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{y\to x^+}u_n(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\theta_n^+(x)z^n=\Theta_x^+(z).$$

Bien évidemment un calcul analogie prouve que $\Theta_x^-(z)=\lim\limits_{y\to x^-}\Theta_y(z)$.

Comme on sait que $x\mapsto\Theta_x(z)$ est croissante (question IV.1.d), l'ensemble A est au plus dénombrable. En effet on peut construire une injection ι de A dans $\mathbb{Q}$ en associant à chaque élément x de A un rationnel compris entre $\Theta_x^-(z)$ et $\Theta_x^+(z)$.

Maintenant, à chaque élément x de A on lui associe $n_0(x)$ le plus petit entier k tel que $f^{\circ k}(x)=c_0$ (qui existe d'après la question IV.2.b). On a alors que la famille $(\Theta_x^+(z)-\Theta_x^-(z))_{x\in A}$ est sommable car c'est une famille de nombres positifs et, pour toute partie B finie inclue dans A,

$$\sum_{x\in B}\Theta_x^+(z)-\Theta_x^-(z)\le\Theta_b(z)-\Theta_a(z)$$

puisque, la fonction $x\mapsto\Theta_x(z)$ est croissante.

Si on note pour tout entier n, $A_n=\{x\in A\mid n_0(x)=n\}$, les ensembles A_n forment une partition de A. D'après le théorème de sommation par paquets on a alors

$$\sum_{x\in A}\Theta_x^+(z)-\Theta_x^-(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{x\in A_n}(\Theta_x^+(z)-\Theta_x^-(z))=\sum_{n=0}^{+\infty}\#A_n(\Theta_{c_0}^+(z)-\Theta_{c_0}^-(z))z^n=2\Delta_f.\sum_{n=0}^{+\infty}\#A_nz^n$$

où $\#A_n$ est le cardinal de n qui est fini car la famille est sommable.

De plus si on note pour tout entier n, B_n l'ensemble des points x de I tels que $f^{\circ n}-c_0$ change de signe en x. Comme la fonction $f^{\circ n}$ est continue alors si $x\in B_n$, $f^{\circ n}(x)=c_0$. Montrons que $B_n=A_n$. Pour cela on considère un élément $x\in A$ et on note $n=n_0(x)$. Pour $k\le n_0$, la fonction $f^{\circ k}$ est strictement monotone au voisinage de x d'après la question IV.1.c. C'est en particulier vrai pour $f^{\circ n}-c_0$ qui, s'annulant en x (d'après la définition de n) change donc de signe. Etant donné que f est strictement décroissante sur $[a,c_0]$ et strictement croissante sur $[c_0,b]$, f^{n+1} a un minimum local en x. On peut dès lors trouver α,β et μ trois réels strictement positifs tels que $f^{\circ(n+1)}([x-\alpha,x])=[f(c_0),f(c_0)+\mu]=f^{\circ(n+1)}([x,x+\beta])$. De ce fait, $f^{\circ k}-c_0$ ne peut pas changer de signe en x. On en déduit bien que $A_n=B_n$ et donc $\#A_n=\gamma_n$.

Cela nous donne finalement que

$$\sum_{x\in A}\Theta_x^+(z)-\Theta_x^-(z)=2\Delta_f.\Gamma_f.$$

On peut aussi considérer la famille $((\theta_n^+(x)-\theta_n^-(x))z^n)_{(n,x)\in\mathbb{N}\times A}$ qui est encore sommable et telle que

$$\sum_{(n,x)\in\mathbb{N}\times A}(\theta_n^+(x)-\theta_n^-(x))z^n=\sum_{x\in A}\sum_{n\in\mathbb{N}}(\theta_n^+(x)-\theta_n^-(x))z^n=\sum_{x\in A}\Theta_x^+(z)-\Theta_x^-(z)=2\Delta_f.\Gamma_f.$$

Cette somme vaut aussi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{x\in A}(\theta_n^+(x)-\theta_n^-(x))z^n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\sum_{x\in A}(\theta_n^+(x)-\theta_n^-(x))z^n.$$

Or $\sum_{n=0}^N\sum_{x\in A}(\theta_n^+(x)-\theta_n^-(x))z^n=\Theta_b^N(z)-\Theta_a^N(z)$ en posant $\Theta_x^N(z)=\sum_{n=0}^N\theta_n(x)z^n$ car $x\mapsto\Theta_x^N(z)$ est une fonction en escalier dont les points de discontinuités (en nombre fini) sont inclus dans A. En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient bien que

$$\Theta_b(z)-\Theta-a(z)=\sum_{x\in A}\Theta_x^+(z)-\Theta_x^-(z)=2\Delta_f.\Gamma_f.$$

On en déduit alors que pour tout $z\in D(0,\frac{1}{2})$, $\Theta_b(z)-\Theta_a(z)=2\Delta_f.\Gamma_f$. En effet l'égalité des deux séries entières sur $[0,\frac{1}{2}]$ permet de montrer qu'elles ont les même coefficients (par exemple en calculant les dérivées successives en 0^+ qui sont égales aux dérivées successives en 0).

4. Le nombre de plis

4. (a) Montrer que le rayon de convergence de Λ_f est $R_f=\exp(-h(f))$. En déduire que $R_f\ge\frac{1}{2}$.

Notons R_f le rayon de convergence de la série entière Λ_f.

— Soit $\rho > \exp(-h(f))$. Il existe donc ρ' tel que $\rho > \rho' > R_f$. De ce fait, $\log((\rho')^{-1}) < h(f)$. Donc pour tout entier n, $\log((\rho')^{-1}) \leq \frac{1}{n}\log(\lambda(f^{\circ n}))$ et donc $(\rho')^{-n} < \lambda(f^{\circ n})$ et finalement, $\lambda(f^{\circ n})(\rho')^n > 1$. De ce fait, $\lambda(f^{\circ n})\rho^n = \lambda(f^{\circ n})(\rho')^n.\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n$ tend vers $+\infty$ car $\frac{\rho}{\rho'} > 1$. On en déduit que $\rho \geq R_f$. Cela étant vrai pour tous les ρ strictement supérieurs à $\exp(-h(f))$, on a que $R_f \leq \exp(-h(f))$.

— Soit $\rho < \exp(-h(f))$, on a $\log((\rho)^{-1}) > h(f)$. Donc, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\log(\rho^{-1}) \geq \frac{1}{n}\log(\lambda(f^{\circ n}))$ et donc $\rho^{-n} > \lambda(f^{\circ n})$ et finalement, $\lambda(f^{\circ n})\rho^n < 1$. De ce fait, la suite $(\lambda(f^{\circ n})\rho^n)$ est bornée car elle est inférieure à 1 à partir d'un certain rang. On en déduit que $\rho \leq R_f$. Cela étant vrai pour tous les ρ strictement inférieurs à $\exp(-h(f))$, on a que $R_f \geq \exp(-h(f))$.

Finalement $R_f = \exp(-h(f))$.

Comme $\lambda(f) = \lambda(f^{\circ 1}) = 2$. On a que $h(f) \leq \log(\lambda(f)) = \log(2)$. Cela implique que $R_f \geq \exp(-\log(2)) = \frac{1}{2}$.

4. (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\lambda(f^{\circ n}) = 1 + \sum\limits_{m=0}^{n-1} \gamma_m$.

On procède par récurrence. Pour $n = 1$, $\lambda(f^{\circ 1}) = 2$ et $\gamma_0 = 1$ car $f^{\circ 0} - c_0 : x \mapsto x - c_0$ change une fois de signe. On a bien $\lambda(f^{\circ 1}) = 1 + \gamma_0$.

Maintenant soit n un entier au moins égal à 1. On suppose que $\lambda(f^{\circ n}) = 1 + \sum_{m=0}^{n-1}\gamma_m$. Notons $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ les points critiques de f où $p = \lambda(f^{\circ n})$ puisque les plis sont alors les intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ pour $i \in [\![1, p]\!]$. Notons de même $\alpha_1 < \cdots < \alpha_q$ où $q = \gamma_n$ les points où $f^{\circ n} - c_0$ change de signe.

Notons que $\{a_i \mid i \in [\![0, p]\!]\} \cap \{\alpha_j \mid j \in [\![1, q]\!]\} = \emptyset$ car, au voisinage d'un point α_j la fonction $f^{\circ n}$ est monotone. En effet, supposons par symétrie qu'il existe ε tel que $f^{\circ n} - c_0$ soit positive sur $]\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon[$ et négative sur $]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j[$. Puisque le nombre de points critiques est fini, quitte à diminuer ε, on peut supposer que $f^{\circ n}$ est monotone sur les deux intervalles $]\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon[$ et $]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j[$. De ce fait, elle est nécessairement (dans notre cas) croissante sur les deux intervalles ; le point α_j n'est effectivement pas critique.

Maintenant, on remarque que chaque a_i est encore un point critique de $f^{\circ(n+1)}$. En effet, soit a_i un point critique (différent de a et de b) $f^{\circ n}$ est monotone par morceaux, donc elle est strictement monotone (et de sens opposé) sur un voisinage de la forme $]a_i - \varepsilon, a_i[$ et sur un voisinage de la forme $]a_i, a_i + \varepsilon[$. De ce fait, $f^{\circ n}(]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[)$ est de le forme $[f(a_i), f(a_i) + \eta[$ ou de la forme $]f(a_i) - \eta, f(a_i)]$. Maintenant, en prenant η assez petit (ce qui revient à prendre ε assez petit), on peut donc supposer que f est (strictement) monotone sur $f^{\circ n}(]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[)$. On en déduit que a_i est encore un point critique.

Les points α_j sont aussi des points critiques de $f^{\circ(n+1)}$ puisque en supposant que $f^{\circ n} - c_0$ est décroissante au voisinage de α_j et donc positive sur un intervalle $]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j]$ et négative sur un intervalle $[\alpha, j, \alpha_j + \varepsilon[$, alors $f^{\circ(n+1)}$ sera strictement croissante sur $]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j]$ et strictement décroissante sur $[\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon[$. Finalement on a $p + 1 + q$ points critiques et donc

$$\lambda(f^{\circ(n+1)}) = p + q = \lambda(f^{\circ n}) + \gamma_n = 1 + \sum_{m=0}^{(n+1)-1} \gamma_m.$$

La récurrence a réussi.

4. (c) En déduire que si $|z| < R_f$, on a $\Lambda_f(z) = \frac{z}{(1-z)^2\Delta_f(z)} + \frac{z}{1-z}$.

Soit z tel que $|z| < R_f$. On a en particulier $|z| < 1$ car $R_f = \exp(-h(f)) \leq 1$ puisque $h(f) \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}
\Lambda_f(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \sum_{m=0}^{n-1}\gamma_m\right)z^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{n-1}\gamma_m\right)z^n \\
&= \frac{z}{1-z} + z\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\gamma_m\right)z^n && \text{(par décalage d'indice)} \\
&= \frac{z}{1-z} + z\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\gamma_m z^m\right) && \text{(par produit de Cauchy)} \\
&= \frac{z}{1-z} + \frac{z\Gamma_f(z)}{1-z}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on a vu aux questions IV.1.b et IV.3.d que pour $|z| < \frac{1}{2}$,

$$\frac{2}{1-z} = \Theta_b(z) - \Theta_a(z) = 2\Delta_f(z).\Gamma_f(z).$$

On en déduit que $\Gamma_f(z) = \dfrac{1}{(1-z)\Delta_f(z)}$ et donc $\Delta_f(z) = \dfrac{z}{1-z} + \dfrac{z}{(1-z)^2\Delta_f(z)}$. L'égalité est alors vraie pour tout z tel que $|z| < R_f$ en procédant comme en $IV.3.d$

5. Un exemple.

5. (a) Donner une expression explicite de $\Delta_f(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R_f$.

Commençons par montrer que l'on peut se ramener au cas d'une fonction vérifiant les hypothèses du préambule de la partie IV. On pose $b = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$ la solution positive de l'équation $f(x) = x$. On pose alors $a = -b = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} < -\frac{7}{4}$ car $\sqrt{2} > \frac{5}{4}$. En prenant $I = [a, b]$ et $c_0 = 0$, on est bien dans la situation décrite précédemment.

Comme l'intervalle $[b, +\infty[$ est stable par f et que f est strictement croissante sur cet intervalle, pour tout entier n, $f^{\circ n}$ est strictement croissant sur $[b, +\infty[$. De même, f envoie $]-\infty, a]$ sur $[a, b[$ donc f pour tout $n \geq 1$, $f^{\circ n}$ est strictement décroissante sur cet intervalle. De ce fait, le nombre de plis de f définie sur $\mathbb{R}$ en entier est égal au nombre de plis de sa restriction à $I = [a, b]$.

On a $f^{\circ 0}(0) = 0$ et $f(0) = c_1 \in [c_1, \alpha_1]$.

Maintenant, par une récurrence immédiate, on montrer que pour tout entier $p \geq 0$, $f^{\circ(3p+1)}(0) \in [c_1, \alpha_1]$, $f^{\circ(3p+2)}(0) \in [\alpha_2, c_2]$ et $f^{\circ(3p+3)} \in [\alpha_0, 0[$. On en déduit alors que pour tout entier p, $\delta_{3p} = 1, \delta_{3p+1} = \delta_{3p+2} = -1$. Cela nous donne que pour z vérifiant $|z| < R_f \leq 1$,

$$\Delta_f(z) = (1 - z - z^2) \sum_{p=0}^{+\infty} z^{3p} = \frac{1 - z - z^2}{1 - z^3}.$$

5. (b) En déduire que si $|z| < R_f$, on a $\Lambda_f(z) = \frac{2z}{(1-z)(1-z-z^2)}$.

Soit z tel que $|z| < R_f$, en utilisant IV.4.c on obtient que

$$\begin{aligned}
\Lambda_f(z) &= \frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2 \dfrac{1-z-z^2}{1-z^3}} \\
&= \frac{z}{1-z} + \frac{z(1+z+z^2)}{(1-z)(1-z-z^2)} \\
&= \frac{z(1-z-z^2) + z(1+z+z^2)}{(1-z)(1-z-z^2)} = \frac{2z}{(1-z)(1-z-z^2)}
\end{aligned}$$

5. (b) Déterminer le rayon de convergence de Λ_f et en déduire que $h(f) = \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On cherche à écrire la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) de la fraction rationnelle $F = \dfrac{2X}{(X-1)(X^2+X-1)}$.

Ses pôles sont 1, $\psi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\check{\psi} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit que l'on peut décomposer F (qui est de degré strictement négatif) sous la forme

$$F = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X-\psi} + \frac{\gamma}{X-\check{\psi}}$$

En évaluant $(X-1)F$ en 1 on obtient $\alpha = 2$. De même on trouve $\beta = \frac{2\psi}{(\psi-1)(\psi-\check{\psi})}$ et $\gamma = \frac{2\check{\psi}}{(\check{\psi}-1)(\check{\psi}-\psi)}$. On en déduit que

$$F(X) = -\frac{\alpha}{1-X} - \frac{\frac{\beta}{\psi}}{1-\frac{X}{\psi}} - \frac{\frac{\gamma}{\check{\psi}}}{1-\frac{X}{\check{\psi}}}$$

En posant $\dfrac{1}{\psi} = \dfrac{2}{-1+\sqrt{5}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $\dfrac{1}{\check{\psi}} = \dfrac{2}{-1-\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \check{\varphi}$, on a

$$F(X) = \frac{-2}{1-X} + \frac{\beta'}{1-\varphi X} + \frac{\gamma'}{1-\check{\varphi}X}$$

où $\beta' = -\dfrac{2}{(\psi-1)(\psi-\check{\psi})} = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{5}$ et $\gamma' = -\dfrac{2}{(\check{\psi}-1)(\psi-\check{\psi})} = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{5}$.

On voit donc que F est la somme de trois fonctions développables en séries entières de rayons de convergence deux à deux distincts. Le rayon de convergence de Δ_f est donc le minimum des trois rayons de convergence qui est le minimum entre 1, ψ et $|\check{\psi}|$ c'est-à-dire ψ.

On a donc $\exp(-h(f)) = \psi$ ce qui implique que $h(f) = \log(\frac{1}{\psi}) = \log(\varphi)$.

5. (d) Déterminer une expression de $\lambda(f^{\circ n})$ en fonction de n.

En utilisant le calcul précédent on a pour z tel que $|z| < R_f$,

$$\Lambda_f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-2 + \beta' \varphi^n + \gamma' (\check{\varphi})^n\right) z^n.$$

Par unicité du développement en série entière on obtient finalement que pour tout entier n

$$\lambda(f^{\circ n}) = -2 + \beta' \varphi^n + \gamma' (\check{\varphi})^n.$$

On vérifie que pour $n = 1$ on obtient bien $\lambda(f) = 2$.