Mines-Ponts 2018 MP Première épreuve de Mathématiques

A. Préliminaires

1) $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=m}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k)$

$$E(X) \leq (m-1)\underbrace{\sum_{k=1}^{m-1}\mathbb{P}(X=k)}_{\leq 1} + n\underbrace{\sum_{k=m}^{n}\mathbb{P}(X=k)}_{=\mathbb{P}(X\geq m)}$$

$$E(X) \leq (m-1) + n\,\mathbb{P}(X\geq m).$$

2) La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $[1,n]$ et croissante.

Donc : $\forall k \in [2,n]$ $\quad \int_{k-1}^{k} \ln t\,dt \leq \int_{k-1}^{k} \ln k\,dt = \ln k$

En sommant et en appliquant la relation de Chasles

$$\sum_{k=2}^{n} \ln k \geq \int_1^n \ln t\,dt = [t\ln t - t]_1^n = n\ln n - n + 1$$

Or $\ln 1 = 0$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \geq n\ln n - n + 1$$

La fonction exponentielle étant croissante

$$n! \geq n^n e^{-n} e \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

3) Puisque la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ est bornée, U_n est non vide et borné pour tout n. Donc les suites $\bar{U}$ et $\underline{U}$ sont définies et bornées par les mêmes bornes que u.

$\forall n \; U_{n+1} \subset U_n$ donc $\underline{U}$ est croissante et $\bar{U}$ est décroissante. Comme ces deux suites sont bornées et monotones, elles convergent.

4) Soit $v=(v_n)_{n\geq 0}$ une suite plus grande que u et décroissante. Alors

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n \quad v_n \geq v_k \geq u_k$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in U_n \quad v_n \geq x$.

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \geq \sup U_n = \overline{u}_n$

Et par conséquent $v \geq \overline{u}$.

$\overline{u}$ est bien la plus petite suite décroissante plus grande que u.

De même $\underline{u}$ est la plus ~~petite~~ grande suite croissante plus petite que u.

5) Si $u \leq v$ alors $\forall n \quad \overline{u}_n \leq \overline{v}_n$ donc $\lim \overline{u} \leq \lim \overline{v}$

6) - Supposons que la suite u converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \ell - \varepsilon/2 \leq u_n \leq \ell + \varepsilon/2$

Par conséquent $\forall n \geq n_0 \quad \ell - \varepsilon/2 \leq \underline{u}_n \leq U_n \leq \overline{U}_n \leq \ell + \varepsilon/2$

(en principe écrire : $\forall n \geq n_0 \quad \forall k \geq n_0 \quad k \geq n$ ~~et~~ $\ell - \varepsilon \leq u_k \leq \ell + \varepsilon$)

Donc par passage à la limite $\ell - \varepsilon/2 \leq \underline{\lim}_{n \to +\infty} u_n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} U_n \leq \ell + \varepsilon/2$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\lim}_{n \to +\infty} U_n \leq \ell + \varepsilon/2$

donc $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \ell$ $\left(= \underline{\lim}_{n\to+\infty} U_n\right.$, de même !).

les suite $\overline{U}$ et $\underline{U}$ sont donc adjacentes et $\lim \overline{U} = \lim \underline{U} = \ell$

- Réciproquement supposons ces deux suites adjacentes de limite ℓ.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \overline{U}_n \leq \ell + \varepsilon \quad \underline{U}_n \geq \ell - \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq 0 \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon.$

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Dans ce cas on peut affirmer

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n.$$

7) $\underline{u_{n+i} \leq u_n + u_i}$, donc par récurrence sur k on a $\underline{u_{nk+i} \leq k u_n + u_i}$ (en écrivant $nk+i = n + \underbrace{(k-1)n+i}_{\text{ancien } i}$)

Et en écrivant $m = (q-1)n + (n+r)$ (possible car $m \geq 2n$)

il vient $\underline{u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}}$. $(*)$

$r \in [0, n-1]$ donc $u_{n+r} \leq \max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}$

et $q-1 = \dfrac{m-r}{n} - 1 = \dfrac{m-n-r}{n}$.

En divisant chaque membre de $(*)$ par m il vient

$$\underline{0 \leq \frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, \dots, u_{2n-1}\}}{m}} \quad (**)$$

8) $0 \leq \dfrac{u_m}{m} \leq \underbrace{\dfrac{u_n}{n} + \max\{u_n, \dots, u_{2n-1}\}}_{\text{indépendant de } m}$ pour $m \geq 2n$.

Donc $\underline{\dfrac{u_m}{m} \text{ est bornée.}}$

Dans $(**)$ $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m \geq 2n}$ est encadrée par deux suites convergentes.

Il résulte alors immédiatement de 5 et 6 que

$$\underline{0 \leq \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}} \quad (\leftarrow \text{limite de la suite majorante})$$

On passe à la limite inférieure sur n, le minorant devenant une suite constante.

$$\underline{0 \leq \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \underline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m}} \quad \left(= \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}\right)$$

9) Or d'après 3 $\underline{\lim}_{m\to+\infty} \dfrac{u_m}{m} \leq \overline{\lim_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m}$.

On en déduit donc $\underline{\underline{\lim}_{m\to+\infty} \dfrac{u_m}{m} = \overline{\lim_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m}}$.

et d'après la question 6) on peut affirmer que $\underline{\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$

C- Une application probabiliste

10) L'évènement $(X_1 < x) \cap \quad \cap (X_n < x)$ est contenu dans $(Y_n < x)$.

De plus si $P(X_1 < x) = 1$ alors pour tout i $P(X_i < x) = 1$

Et puisque les X_i sont indépendantes

$$\mathbb{P}((X_1 < x) \cap \dots \cap (X_n < x)) = \mathbb{P}(X_1 < x)\,\mathbb{P}(X_2 < x) \dots \mathbb{P}(X_n < x) = 1$$

Par conséquent $1 \leq \mathbb{P}(Y < x)\ (\leq 1)$ donc $\mathbb{P}(Y < x) = 1$.

- De même $\mathbb{P}(Y_n \geqslant x) \geqslant (\mathbb{P}(X_1 \geqslant x))^n > 0$, puisque

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geqslant x) \subset (Y_n \geqslant x)$$

11) $Y_{m+n} = \dfrac{m}{m+n} Y_m + \dfrac{n}{m+n}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k\right)$

Donc $Y_m \geqslant x$ et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x$

implique $Y_{m+n} \geqslant \dfrac{m}{m+n} x + \dfrac{n}{m+n} x = x$.

D'où l'inclusion des évènements.

On en déduit.

$$\mathbb{P}(Y_{m+n} \geqslant x) \geqslant \mathbb{P}(Y_m \geqslant x)\,\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right)$$

car d'après le théorème des coalitions

$$Y_m = f_m(X_1, \quad, X_m) \text{ et } \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k = g(X_{m+1}, \quad, X_{m+n})$$

sont indépendantes.

Le problème est qu'aucun théorème du cours ne permet de dire directement que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ a même loi que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \ (= Y_n)$.

La démonstration étant un peu technique et bien au dessus de ce qui a été demandé auparavant, ~~on~~ →

On est en droit de se demander si l'auteur du sujet n'a pas considéré que ce résultat faisait partie du cours.

Démonstration.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nx\right) = p_{m,n,x}$$

$$p_{m,n,x} = \sum_{\substack{(x_1, \ldots, x_n) \in X_{m+1}(\Omega) \times \cdots \times X_{m+n}(\Omega) \\ x_1 + \cdots + x_n \geqslant nx}} \mathbb{P}\left((X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}) = (x_1, \ldots, x_n)\right).$$

Or $\forall i \quad X_i(\Omega) = X_1(\Omega)$ (en toute rigueur, à un ensemble négligeable près)

donc

$$p_{m,n,x} = \sum_{\substack{(x_1, \ldots, x_n) \in (X_1(\Omega))^n \\ x_1 + \cdots + x_n \geqslant nx}} \mathbb{P}\left((X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}) = (x_1, \ldots, x_n)\right)$$

Or les X_i sont indépendantes, donc

$$p_{m,n,x} = \sum_{\substack{(x_1, \ldots, x_n) \in (X_1(\Omega))^n \\ x_1 + \cdots + x_n \geqslant nx}} \mathbb{P}(X_{m+1} = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{m+n} = x_n)$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{(x_1, \ldots, x_n) \in (X_1(\Omega))^n \\ x_1 + \cdots + x_n \geqslant nx}} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)}_{\text{indépendant de } m}$$

$$p_{m,n,x} = p_{0,n,x} = \mathbb{P}(Y_n \geqslant x).$$

On a donc bien

$$\mathbb{P}(Y_{m+n} \geqslant x) \geqslant \mathbb{P}(Y_m \geqslant x)\,\mathbb{P}(Y_n \geqslant x)$$

12) Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) = 0$ alors $\mathbb{P}(Y_n \geq x) = 0$

car $(Y_n \geq x) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (X_i \geq x)$

donc $\mathbb{P}(Y_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geq x) = 0$

~~. De même si $\mathbb{P}(X_1 \leq x)$ alors $\mathbb{P}(Y_n \leq$~~

. Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) = 0$ alors $\left(\mathbb{P}(Y_n \geq x)\right)^{1/n} = 0$ pour tout n

et $\lim_{n \to +\infty} \left(\mathbb{P}(Y_n \geq x)\right)^{1/n} = 0$ existe

Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) > 0$ alors $\forall n \quad \mathbb{P}(Y_n \geq x) > 0$

On peut passer au logarithme dans l'inégalité de la question 11).

$$\ln\left(\mathbb{P}(Y_{n+m} \geq x)\right) \geq \ln\left(\mathbb{P}(Y_n \geq x)\right) + \ln\left(\mathbb{P}(Y_m \geq x)\right)$$

en posant $u_n = -\ln\left(\mathbb{P}(Y_n \geq x)\right)$ alors

$$u_{n+m} \leq u_n + u_m.$$

donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est sous-additive et positive

D'après le résultat de la partie B $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$

existe, donc $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{u_n}{n}} = e^{\ell}$ aussi

donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\mathbb{P}(Y_n \geq x)\right)^{\frac{1}{n}} = e^{-\ell}$ existe aussi

D. le théorème de Erdös-Szekeres

13) Si $s = 1$ le résultat demandé est vrai.
On suppose le résultat vrai à l'ordre $s-1$ avec $s \geq 2$.
Soit z un élement de la s-ième pile.
Si z est dans la dernière pile. c'est qu'au moment où il y a été insérer. il était plus petit qu'un élement b_{s-1} de la $s-1$-ième pile. (celui qui était au sommet au moment d'insérer z). On applique alors l'hypothèse de récurrence à l'élément b_{s-1} et au $s-1$ premières piles. On peut ainsi construire $(b_1, \quad , b_{s-1}, b_s = z)$ vérifiant les hypothèses

14) Si à l'issue du processus on obtient s piles, deux cas sont possibles:

- $s \geq q+1$ alors en partant de l'élément au sommet de la $(q+1)$-ième pile, on peut construire d'après la question précédente une suite décroissante de longueur $q+1$.
- ~~th~~ $s \leq q$. L'une des piles est alors de taille au moins $p+1$, et les éléments dans la pile apparaissant dans la liste dans le même ordre que dans la pile (depuis le bas), on peut donc extraire de la liste une sous-liste croissante de taille (au moins) $p+1$.

E. Comportement asymptotique d'une suite aléatoire.

15) les variables aléatoires $(A_1, \quad , A_n)$ ne sont pas mutuellement indépendantes. (même deux à deux)

$$\mathbb{P}(A_1 = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \qquad \mathbb{P}(A_2 = 1) = \frac{1}{n}$$

mais $\mathbb{P}(A_1 = 1, A_2 = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(A_1 = 1)\ \mathbb{P}(A_2 = 1)$

16) On peut partitionner S_n en fonction ~~des~~ l'ensemble des valeurs $\{\sigma(s_1), \ldots, \sigma(s_k)\} = v$; notons v l'ensemble de ces valeurs et $E_v = \{\sigma \in S_n \mid \{\sigma(s_1), \ldots, \sigma(s_n)\} = v\}$ (8)

$$A^s = \coprod_{v \in V} B^{-1}(E_v) \cap A^s$$

$$\mathbb{P}(A^s) = \sum_{v \in V} \mathbb{P}(B^{-1}(E_v) \cap A^s)$$

$$= \sum_{v \in V} \mathbb{P}(B^{-1}(E_v)) \, \mathbb{P}(A^s \mid B^{-1}(E_v))$$

$$= \sum_{v \in V} \mathbb{P}(B^{-1}(E_v)) \times \frac{1}{k!}$$

car chaque permutation est équiprobable et une seule est strictement croissante.

$$= \frac{1}{k!} \sum_{v \in V} \mathbb{P}(B^{-1}(E_v))$$

$$\mathbb{P}(A^s) = \frac{1}{k!}$$

17) L'application $\sigma \to \varphi \circ \sigma$ où $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ est une bijection de S_n, qui conserve la distribution uniforme sur S_n et transforme les suites extraites croissantes en suites extraites décroissantes de même longueur et réciproquement. C_n et D_n ont donc même loi.

(Réponse incomplète : voir à la fin)

18) Clairement $(C_n \geq k) \subset \bigcup_{\substack{(s_1, \ldots, s_k) \\ 1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leq n}} A^s$

donc $\mathbb{P}(C_n \geq k) \leq \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leq n} \mathbb{P}(A^s) = \frac{\binom{n}{k}}{k!}$

19) $\mathbb{R}$ est archimédien donc $\{p,\ p\in\mathbb{N}\ p\geq \alpha e\sqrt{n}\}\neq\emptyset$

on prend pour k le minimum de cet ensemble.

Puisque $\alpha e\sqrt{n} > 1\times e\times 1$ on a $k\geq 3$ et en particulier k est non nul.

$$\mathbb{P}(C_n\geq \alpha e\sqrt{n}) = \mathbb{P}(C_n\geq k)\leq \frac{\binom{n}{k}}{k!}$$

$$\mathbb{P}(C_n\geq\alpha e\sqrt{n})\leq \frac{n!}{(k!)^2(n-k)!}\leq\frac{n^k}{(k!)^2}\leq\left(\frac{e}{k}\right)^{2k} n^k$$

$$\mathbb{P}(C_n\geq\alpha e\sqrt{n})\leq \left(\frac{e\sqrt{n}}{k}\right)^{2k}\leq\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2k}\leq \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2(k-1)}}_{\text{car } \frac{1}{\alpha}<1.}$$

$$\mathbb{P}(C_n\geq\alpha e\sqrt{n})\leq\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}.$$

20) On a

$E(C_n)\leq k-1+n\,\mathbb{P}(C_n\geq k)$ (question 1)

$$\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}}\leq \alpha e+\sqrt{n}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}} = \alpha e+\sqrt{n}\, e^{-2\alpha\ln(\alpha) e\sqrt{n}}.$$

On choisit $\alpha = 1+n^{-\frac{1}{4}}$ $\ln\alpha = n^{-\frac{1}{4}}+o(n^{-\frac{1}{4}})$

$$\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}}\leq (1+n^{-\frac{1}{4}})e + \underbrace{\sqrt{n}\, e^{-2en^{\frac{1}{4}}+o(n^{\frac{1}{4}})}}_{\to 0}$$

Il en résulte que $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}}\leq e.$

17) PS. $\forall n\geq 2$ $n\geq(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}-1)+1 = n\underbrace{-2\sqrt{n}+2}_{\geq 0}\geq(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)+1$

$n\geq(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)+1$

Donc $\forall n\ C_n\geq\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ ou $D_n\geq\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ donc $C_n+D_n\geq\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1$

(car $C_n\geq 1$ et $D_n\geq 1$.

$E(C_n+D_n)\geq E(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)+1\geq\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1\geq\sqrt{n}$

Or $E(C_n)=E(D_n)$ donc $E(C_n)\geq\frac{\sqrt{n}}{2}$