Troisième partie

III. 1) C'est le théorème de Dini. La propriété de Borel-Lebesgue n'est pas au programme, il faut le démontrer à l'aide de la caractérisation séquentielle des compacts.

- On raisonne par l'absurde. On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas uniformément vers f.

$$\exists \varepsilon>0 \quad \forall n_0\in\mathbb{N} \quad \exists n\geq n_0 \quad \exists x_n\in[0,1] \quad |f_n(x_n)-f(x_n)|\geq\varepsilon.$$

On peut donc construire une extractrice φ telle que

$$\exists \varepsilon>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \exists x_{\varphi(n)}\in[0,1] \quad |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})-f(x_{\varphi(n)})|\geq\varepsilon.$$

De la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ on peut extraire une suite $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 0}$ qui converge vers un a de $[0,1]$.

En posant $\theta=\varphi\circ\psi$ on a donc

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad |f_{\theta(n)}(x_{\theta(n)})-f(x_{\theta(n)})|\geq\varepsilon.$$

Or f_n converge en croissant vers f, donc

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad f(x_{\theta(n)})-f_{\theta(n)}(x_{\theta(n)})\geq\varepsilon$$

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad f(x_{\theta(n)})\geq f_{\theta(n)}(x_{\theta(n)})+\varepsilon.$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall m\geq n \qquad f(x_{\theta(m)})\geq f_{\theta(m)}(x_{\theta(m)})+\varepsilon\geq f_{\theta(n)}(x_{\theta(m)})+\varepsilon.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, puisque f et $f_{\theta(n)}$ sont continue.

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad f(a)\geq f_{\theta(n)}(a)+\varepsilon.$$

en faisant tendre n vers $+\infty$

$$f(a)\geq f(a)+\varepsilon.$$

c'est bien une contradiction.

III.2) Soit $h_n = \inf(g, f_n)$.

Alors $\begin{cases} h_n \leq h_{n+1} \text{ pour tout } n. \\ h_n \text{ est dans } E \\ (\forall n \quad h_n \leq g.) \\ \forall x \lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x) = g(x) \quad \text{et } g \text{ est dans } E \end{cases}$

D'après la question précédente $(h_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers g

T est positive, donc T est ∞-continue et par conséquent $T(g) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(h_n)$.

Or $\forall n \quad T(h_n) \leq T(f_n)$ car $h_n \leq f_n$ et T positive et $(T(f_n))_{n \geq 0}$ est croissante donc possède une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Par conséquent $T(g) \leq \lim\limits_{n \to +\infty} T(f_n)$.

III.3) Soit g dans E $g \leq f$, d'après la question précédente $T(g) \leq \lim\limits_{n \to +\infty} T(f_n)$

Donc $\sup\limits_{g,\, 0 \leq g \leq f} T(g) \leq \lim\limits_{n \to +\infty} T(f_n) < +\infty$

III.4) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de A^+, vérifiant les hypothèses

Pour chaque f_n construisons une suite $(f_{p,n})_{p \geq 0}$ d'éléments de E avec.

$f_{p+1,n} \geq f_{p,n}$, $\forall x \lim\limits_{p \to +\infty} f_{p,n}(x) = f(x)$, $\lim\limits_{p \to +\infty} T(f_{p,n}) < +\infty$

permettant de définir $T(f_n) = \sup\limits_{g \in E\, g \leq f_n} T(g)$.

Posons $\quad g_p = \sup\limits_{0 \leq n \leq p} f_{p,n}$.

Par construction a.

+ $\boxed{g_p \in E}$

+ $\boxed{\forall p \quad g_{p+1} \geqslant g_p}$

car $\quad g_p \leq \sup\limits_{0 \leq n \leq p} (f_{p+1,n}) \leq \sup\limits_{0 \leq n \leq p+1} (f_{p+1,n})$

+ pour $\quad 0 \leq n \leq p$.

$$f_{p,n} \leqslant f_n \leqslant f_p$$

donc $\quad g_p \leq f_p$, donc $\quad T(g_p) \leq T(f_p)$

et par conséquent $\quad \boxed{\lim\limits_{p \to +\infty} T(g_p) < +\infty}$

+ $\forall x \in [0,1] \quad (g_p(x))_{p \geqslant 0}$ est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant n \qquad g_p(x) \geqslant f_{n,p}(x)$

donc $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \lim\limits_{p \to +\infty} g_p(x) \geqslant f_n(x)$

puis $\qquad \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g_p(x) \geqslant f(x)}$

Or $\quad \forall x \in [0,1] \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad f_{p,n}(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$

$\qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad g_p(x) \leq f(x)$

donc $\quad \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g_p(x) \leq f(x)}$

Et en conclusion $\quad \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g_p(x) = f(x)}$

Il résulte de ces quatre points que f est dans A^+.

On a vu en III.3, que, avec les notations du III.3, ④

$T(f) \leq \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.

D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \in E$ et $f_n \leq f$ donc $T(f_n) \leq T(f)$ (par définition de $T(f)$), donc $\lim_{n\to+\infty} T(f_n) \leq T(f)$

et finalement $T(f) = \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.

En revenant aux notations de cette question III.4 on a donc $T(f) = \lim_{p\to+\infty} T(g_p)$.

Or on a déjà remarqué que $\forall p$ $g_p \leq f_p$

donc $\boxed{T(f) \leq \lim_{p\to+\infty} T(f_p)}$.

D'autre part.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall p \geq n$ $\cancel{f_{p,n} \leq g_p}$.

$\cancel{T(f_{p,n}) \leq T(g_p)}$

$\forall p$ $f_p \leq f$

donc $T(f_p) \leq T(f)$

puis $\boxed{\lim_{p\to+\infty} T(f_p) \leq T(f)}$

En regroupant $\boxed{T(f) = \lim_{p\to+\infty} T(f_p)}$.

III.5 Il est clair que si f est dans A^+ et f_1 dans E alors $f + f_1$ est dans A^+ et $T(f+f_1) = T(f) + T(f_1)$ (Ajouter $T(f_1)$ partout dans les démonstrations précédentes)

Sait $(g_{p,n+1})_{p\geq 0}$ une suite associée à f_{n+1} comme dans la question précédente et $\boxed{H_p = f_n - g_{p,n+1}}$.

alors $T(H_p) = T(f_n) - T(g_{p,n+1})$, donc $\lim_{n\to+\infty} T(H_p) = T(f_n) - T(f_{n+1})$

Or $H_p \geq f_n - f_{n+1}$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe p_n tel que $\left|T(H_p) - (T(f_n) - T(f_{n+1}))\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

On choisit un tel p_n et on pose $\boxed{h_n = H_{p_n}}$.

On a bien $f_n - f_{n+1} \leq h_n$ et $T(h_n) \leq T(f_n) - T(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

En sommant

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{N} h_n(x)}_{S_N} \geq \underbrace{f_0(x) - f_{N+1}(x)}_{U_N}$$

$(S_N)_{N\geq 0}$ et $(U_N)_{N\geq 0}$ convergent simplement en croissant vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n$ et $f_0 - f$

On peut appliquer le théorème de convergence croissante

~~$\sum_{n=0}^{+\infty} T(h_n) \geq T(S) \geq T(f_0) - T(f)$~~

~~convergence croissante (+ $T(g+h) \leq T(g) + T(h)$ si g et h dans A^+)~~

et remarquer aussi que si f et g sont dans A^+, $f+g$ aussi avec $\boxed{T(f+g) = T(f) + T(g)}$ (si (f_n) et (g_n) sont associées à f et g $(f_n + g_n)_{n\geq 0}$ est clairement associée à $f+g$).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T(h_n) \geq T(f_0) - T(f)$$

$$-\left(\lim_{n\to+\infty} T(f_n)\right) + T(f_0) + \varepsilon \geq T(f_0) - T(f)$$

Soit $\forall \varepsilon > 0 \quad T(f) \geq \lim_{n \to +\infty} T(f_n) - \varepsilon.$

Or
$$\boxed{T(f) \leq \lim_{n \to +\infty} T(f_n)}$$

Donc
$$\boxed{T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f_n)}$$

P.S: $\lim_{n \to +\infty} T(f_n)$ existe car $\left(T(f_n)\right)_{n \geq 0}$ est décroissante minorée par $T(f)$.

III. 6) (Convergence dominée)

Suivons les indications et posons.

$$f_n = \sup_{p \geq n} g_p - \inf_{p \geq n} g_p.$$

$\left(\sup_{p \geq n} g_p\right)_{n \geq 0}$ est décroissante et $\left(\inf_{p \geq n} g_p\right)_{n \geq 0}$ est croissante, donc $(f_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

De plus $(f_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0. (qui est dans E)

$$f_n = \lim_{\substack{N \to +\infty \\ n \geq N}} \underbrace{\sup_{n \leq p \leq N} g_p - \inf_{n \leq p \leq N} g_p}_{h_N}$$

où h_N est dans E et vérifie $h_{N+1} \geq h_N$.

et $h_N \leq 2$. donc $T(h_N) \leq 2\,T(2)$.

donc. $\lim_{N \to +\infty} T(h_N) < +\infty.$

Donc $\boxed{f_n \text{ est dans } A^+ \text{ pour tout } n}$

le théorème de convergence décroissante donne
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} T(f_n) = 0}$$

Or $g \leq g_n + f_n$ donc

$T(g) \leq T(g_n) + T(f_n)$

et $g \geq g_n - f_n$ donc $T(g) \geq T(g_n) - T(f_n)$

Soit $T(g) - T(f_n) \leq T(g_n) \leq T(g) + T(f_n)$

le lemme des gendarmes donne $\boxed{T(g) = \lim_{n \to +\infty} T(g_n)}$.

PS. $\forall n, N$, $N \geq n$ $\sup_{p \geq n} g_p \geq g_n$ $\inf_{p \geq n} g_p \leq g_n$

$\sup_{p \geq n} g_p \geq g_N$ $\inf_{p \geq n} g_p \leq g_N$

Donc $\forall n, N$ $N \geq n$

$g_N - g_n \leq f_n \leq g_n - g_N$

en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient bien

$$g - g_n \leq f_n \leq g_n - g.$$

III.7. On choisit $T(g) = \int_0^1 g(x)\,dx$ qui est positive

- En prenant $f_n(x) = n^2(1-x)x^n$. $f_n \in E$ pour tout n, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ pour tout x, mais $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1$.

III.8) ~~Si T est positive~~ Si T ∞-continue alors on peut écrire, d'après les résultat de la première partie $T = T^+ - T^-$ où T^+ et T^- sont positives.

Le résultat de la question III.6 est valide pour T car il est valide pour T^+ et T^-