MP*2-2018/2019 Correction du DTL 08 (Lyon-Cachan-1993)

Partie I

Décomposition d'une application linéaire en différence d'application linéaires positives

Commençons par remarquer qu'une application linéaire T , définie sur E, est positive si et seulement si

$$f \geq g \Rightarrow T(f) \geq T(g).$$

Le cas $g = 0$ montrer que la condition est nécessaire, la remarque $f \geq g \Rightarrow f - g \geq 0$ et le linéarité de T montre que la condition est suffisante.

I.1) Soit T une forme linéaire positive sur E. Soit f dans E.

$$-\|f\|_\infty 1 \leq f \leq \|f\|_\infty 1,$$

donc, puisque T est positive don croissante

$$-\|f\|_\infty T(1) \leq T(f) \leq \|f\|_\infty T(1),$$

et par conséquent

$$\|T(f)\| \leq \|f\|_\infty T(1)$$

ce qui prouve que T est ∞-continue.

I.2) Il existe M tel que $T(f) \leq M\|f\|_\infty$ pour tout f de E, en particulier si f est dans E^+et g dans E avec $0 \leq g \leq f$ alors $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, puis

$$T(g) \leq |T(g)| \leq M\|g\|_\infty \leq M\|f\|_\infty,$$

et par conséquent

$$T^+(f) \leq M\|f\|_\infty < +_infty.$$

I.3)

a) Si $\alpha = 0$ alors $T^+(\alpha f) = 0 = \alpha T^+(f)$, avec la convention $0\infty = 0$ le cas échéant. Si $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq g \leq \alpha f \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{\alpha g} \leq f \\ &\Rightarrow \quad T(\frac{1}{\alpha} g) \leq T^+(f) \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} T(g) \leq T^+(f) \\ &\Rightarrow \quad T(g) \leq \alpha T^+(f) \end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure

$$T^+(\alpha f) \leq \alpha T^+(f).$$

Puis, en remplaçant f par αf,

$$T^+(f) = T^+(\frac{1}{\alpha}\alpha f) \leq \frac{1}{\alpha} T^+(\alpha f),$$

soit

$$\alpha T^+(f) \leq T^+(\alpha f).$$

L'est deux inégalités donnent l'égalité.

b) Toutes les fonctions considérée sont des éléments de E. Montrons que

$$A = \{h; 0 \leq h \leq f + g\} = \{h_1 + h_2; 0 \leq h_1 \ f, 0 \leq h_2 \leq g\} = B.$$

L'inclusion $B \subset A$ est évidente, montrons $A \subset B$.
Soit h dans B, posons $h_1 = \inf(f, h)$, soit $h(x) = \min(h(x), f(x)$, puis $h_2 = f + g - h_1$.
On a clairement $0 \leq h_1 \leq f$, en suite si $h_1(x) = h(x)$ alors $h_2(x) = g(x) + (f(x) - h(x))$ donc $h_2(x) \geq 0$ car $h \leq f + g$ et $h_2(x) \leq g(x)$ car $f(x) - h(x) \leq 0$, si $h_1(x) = f(x)$, alors $h_2(x) = g(x)$, donc $0 \leq h_2(x) \leq g(x)$.
Comme de plus $h = h_1 + h_2$, on a bien $h \in B$.

q.e.d.

Pour conclure

$$T^+(f + g) = \sum_{h \in A} T(h) = \sum_{h \in B} T(f) = \sup_{0 \leq h_1 \leq f, 0 \leq h_2 \leq g} T(h_1) + T(h_2) =$$

$$\sup_{0 \leq h_1 \leq f} T(h_1) + \sup_{0 \leq h_2 \leq g} T(h_2) = T^+ f + T^+ g.$$

I.4)

a) Si $f \geq 0$ alors $f = f^+$ et $T^+(f) = T^+(f^+) \geq 0$. Remarquons que l'énoncé considère comme évident que T^+ définie sur E^+ est à valeurs positives, ce que nous utilisons ici. Cela résulte de ce que pour tout f de E^+, $0 \leq g = 0 \leq f$ donc $T^+(f) \geq T(g) = 0$.
La difficulté est de prouver que T est linéaire, pour une fois !

b) — Soit α dans $\mathbb{R}$ et f dans E.
   - — Si $\alpha = 0$, $T^+(\alpha f) = 0 = \alpha T^+(f)$.
   - — Si $\alpha > 0$, $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Donc $T^+(\alpha f) = T^+(\alpha f^+) - T^+(\alpha f^-)$. En utilisant $I.3.a)$ on obtient immédiatement $T^+(\alpha f) = \alpha T^+(f)$.
   - — Si $\alpha < 0$ $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$, $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$, avec $(-\alpha) > 0$. En utilisant $I.3.a)$ on obtient immédiatement $T^+(\alpha f) = \alpha T^+(f)$.

— Si $(f, g) \in E^2$, d'une part $f + g = (f + g)^+ - (f + g)^-$, et d'autre part $f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. Il en résulte

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Toutes les fonctions apparaissant dans l'égalité précédentes sont dans E^+, on peut donc appliquer $I.3.b)$ et

$$T^+((f + g)^+) + T^+(f^-) + T^+(g^-) = T^+((f + g)^-) + T^+(f^+) + T^+(g^+),$$

puis

$$T^+((f + g)^+) - T^+((f + g)^-) = T^+(f^+) - T^+(f^-) + T^+(g^+) - T^+(g^-),$$

c'est-à-dire

$$T^+(f + g) = T^+(f) + T^+(g).$$

I.5) Si $\varphi(x_0) < 0$ pour un x_0 de $I = [0, 1]$ alors puisque φ est continue sur sur I il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de $I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ on ait $\varphi(x) \leq \frac{\varphi(x_0)}{2}$. Choisissons maintenant une fonction f continue positive et non-identiquement nulle dont le support est contenu dans $I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, par exemple une fonction chapeau, alors $T_\varphi(f) < 0$. Donc, par contraposée, si T_φ est positive alors φ positive. la réciproque est totalement claire.
De plus

$$\forall f \in E \quad |T_\varphi(f)| \leq \|\varphi\|_\infty \, \|f\|_\infty$$

et T_φ est donc bien ∞-continue.

I.6)

a) Soit f dans E^+, puis g dans E, $0 \leq g \leq f$.

$$T_\varphi(g) = \int_0^1 g(x)\varphi(x)\, dx \leq \int_0^1 g(x)\varphi^+ i(x)\, dx,$$

cette dernière inégalité étant justifiée car $g \geq 0$ et $\phi \leq \varphi^+ i$.

Ensuite, puisque $\varphi^+ \geq 0$ et $g \leq f$

$$T_\varphi(g) \leq \int_0^1 f(x)\varphi^+(x)\,dx,$$

dont découle , par passage à la borne supérieur

$$T^+(f) \leq T_{\varphi^+}(f).$$

b) Montrons tout d'abord, comme nous le suggère l'énoncé que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers φ^+ sur $[0,1]$.
— Si $\varphi(x) \leq 0$ alors $\varphi_n(x) - \varphi^+(x) = 0$.
— Si $\varphi(x) > 0$

$$\varphi_n(x) - \varphi^+(x) = \frac{\varphi(x)^2}{\varphi(x) + \frac{1}{n}} - \varphi(x) = -\frac{\varphi(x)}{n\varphi(x)+1},$$

donc

$$0 \leq \varphi^+(x) - \varphi_n(x) \leq \frac{1}{n}.$$

Par conséquent $\|\varphi^+ - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ et $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers φ^+ sur $[0,1]$.

q.e.d.

$[0,1]$ est un segment, f est bornée sur ce segment, donc $(f\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $f\varphi^+$ sur le segment $[0,1]$, donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi^+(x)f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)f(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi(x)\frac{\varphi^+(x)}{|\varphi(x)| + \frac{1}{n}} f(x)\,dx \\
\int_0^1 \varphi^+(x)f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi(x)g_n(x)\,dx
\end{aligned}$$

Or $0 \leq g_n \leq f$, donc $\int_0^1 \varphi(x)g_n(x)\,dx \leq T_\varphi^+(f)$ et par passage à la limite

$$\underline{T_{\varphi^+}(f) \leq T_\varphi^+(f)}$$

c) On déduit de *a*) et *b*) que $T_{\varphi^+}(f) = T_\varphi^+(f)$ pour tout f de E^+. Or pour tout f de E $T_\varphi^+(f) < +\infty$ car T_φ est ∞-continue. On peut donc définir T_φ^+ sur E, avec, pour tout f de E :

$$\begin{aligned}
T_\varphi^+(f) &= T_\varphi^+(f^+) - T_\varphi^+(f^-) \\
&= T_{\varphi^+}(f^+) - T_{\varphi^+}(f^-) \\
T_\varphi^+(f) &= T_{\varphi^+}(f)
\end{aligned}$$

q.e.d.