Centrale 2010. Option MP. Mathématiques I.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Partie I. Préliminaires géométriques.

A.1) Solution "géométrique" :
$\widehat{abc}$ est par définition l'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$ c'est à dire le "triangle plein" au sens géométrique (éventuellement dégénéré en un segment) ABC avec A (resp. B, C) les points d'affixe a (resp. b, c).
Si on désigne par I, J, K les points d'affixe respectives 1, i et -1 alors τ_0 est le triangle KOJ, τ_1 le triangle IOJ et τ le triangle KJI donc on a bien $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$. $\square$
Solution "calculatoire" :
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$.
On a $\alpha.(-1) + \beta.0 + \gamma.i = (\alpha + \dfrac{\beta}{2}).(-1) + \dfrac{\beta}{2}.1 + \gamma.i$ et $(\alpha + \dfrac{\beta}{2}, \dfrac{\beta}{2}, \gamma) \in K$ donc $\tau_0 \subset \tau$.
On prouve de même que $\tau_1 \subset \tau$ et donc que $\tau_0 \cup \tau_1 \subset \tau$.
Réciproquement soit $z = \alpha.(-1) + \beta.1 + \gamma.i \in \tau$. Si $\alpha \geqslant \beta$ on a $z = (\alpha - \beta).(-1) + 2\beta.0 + \gamma.i$ ce qui prouve que $z \in \tau_0$ et sinon $z = (\beta - \alpha).1 + 2\alpha.0 + \gamma.i$ donc $z \in \tau_1$.
En conclusion $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$. $\square$

A.2) Cf solution "géométrique" ci-dessus.

A.3.a) Notons s la réflexion définie par l'énoncé et s' celle par rapport à la parallèle à l'axe $x'x$ passant par a également. On a alors $s \circ s' = r$ où r est la rotation de centre a et d'angle 2θ donc $s = r \circ s'$. Or on a clairement $r(z) - a = e^{2i\theta}(z - a)$ et $s'(z) - a = \overline{z - a}$ d'ou $z' - a = s(z) - a = e^{2i\theta}\big(s'(z) - a\big) = e^{2i\theta}\overline{(z - a)}$. $\square$

A.3.b) Clairement $z' - a = \rho(z - a)$ $\square$

A.3.c) • On constate immédiatement que -1 est point fixe (unique par un calcul immédiat) de ϕ_0 et que en notant $\phi_0(z) = z'$ on a $z' + 1 = \dfrac{1+i}{2}(\overline{z} + 1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}\overline{(z + 1)}$.
Donc, daprès les deux questions précédentes, $\phi_0 = s_0 \circ h_0 = h_0 \circ s_0$ avec h_0 l'homothétie de centre -1 et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et s_0 la réflexion par rapport à la droite passant par -1 et d'angle polaire $\dfrac{\pi}{8}$. $\square$

Unicité : soit une telle décomposition $h' \circ s'$. Comme -1 est l'unique point fixe de ϕ_0 on a que -1 est le centre de h' et donc (avec des notations claires) $z' + 1 = \rho e^{2i\theta}\overline{(z + 1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}\overline{(z + 1)}$ pour tout z donc $\rho e^{2i\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}$ donc (puisque $\rho > 0$) $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{8}$ ce qui prouve l'unicité de la décomposition. $\square$

• De même 1 est l'unique point fixe de ϕ_1 qui se traduit par $z' - 1 = \dfrac{1-i}{2}\overline{(z - 1)}$ donc $\phi_1 = h_1 \circ s_1 = s_1 \circ h_1$ avec h_1 l'homothétie de centre 1 et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et s_1 la réflexion par rapport à la droite passant 1 et d'angle polaire $-\dfrac{\pi}{8}$. L'unicité de cette décomposition se prouve comme précédemment. $\square$

A.4) Si f est une application affine, comme elle conserve le barycentre, on a que l'image du triangle plein $\widehat{abc}$ est le triangle plein $\widehat{a'b'c'}$ avec $a' = f(a), \ldots$
En particulier avec ϕ_0 et ϕ_1 et ainsi on constate que $\phi_0(\tau) = \tau_0$ et $\phi_1(\tau) = \tau_1$. $\square$

B.1.a) Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$. Elle est continue de sorte que $f^{-1}\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$. Donc $K = f^{-1}\{1\} \cap [0, 1]^3$ également en tant qu'intersection de deux fermés.
En outre K est borné car inclus dans $[0, 1]^3$ donc compact en tant que fermé borné en dimension finie. $\square$

B.1.b) Si $u = (u_1, u_2, u_3) \in K$ et $v = (v_1, v_2, v_3) \in K$ et si $t \in [0, 1]$ alors $w = tu + (1 - t)v = (w_1, w_2, w_3)$ avec $w_i = tu_i + (1-t)v_i$ de sorte que $w_i \geqslant 0$ et $w_1 + w_2 + w_3 = t(u_1 + u_2 + u_3) + (1-t)(v_1 + v_2 + v_3) = t + (1 - t) = 1$ et ainsi $w \in K$ donc K est convexe. $\square$

B.1.c) Soit (a, b, c) fixé dans $\mathbb{C}^3$ et soit F l'application de $\mathbb{R}^3$ dans C définie par $F(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha a + \beta b + \gamma c$.
F est continue donc $\widehat{abc} = F(K)$ est compact en tant qu'image continue d'un compact.
Par ailleurs F est linéaire donc $F(K)$ est convexe (image d'un convexe par une application affine).
En conclusion $\widehat{abc}$ est un compact convexe de $\mathbb{C}$. $\square$

B.1.d) L'application d de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $d(z_1,z_2) \longmapsto |z_1-z_2|$ est continue (composée de $(z_1,z_2) \longmapsto z_1-z_2=z$ qui est linéaire donc continue car espace de départ de dimension finie par l'application $z \longmapsto |z|$ qui est 1-lipschitzienne). Par ailleurs $\widehat{abc}^2$ est un compact de $\mathbb{C}^2$ en tant que produit de deux compacts. Donc l'application d est bornée sur $\widehat{abc}^2$ et y atteint sa borne supérieure. D'où l'existence de $\delta(\widehat{abc})$. $\square$

B.2.a) Notons $M=\max(|z-a|,|z-b|,|z-c|)$ et soit $z'=\alpha a+\beta b+\gamma c \in \widehat{abc}$.
Il vient par inégalité triangulaire et du fait que α, β et γ sont positifs :
$|z-z'| \leqslant \alpha|z-a|+\beta|z-b|+\gamma|z-c| \leqslant (\alpha+\beta+\gamma)M=M$
Donc $\sup\{|z-z'| \ / \ z' \in \widehat{abc}\} \leqslant M$ et l'inégalité inverse résulte du fait que a, b et c appartiennent à $\widehat{abc}$. $\square$

B.2.b) Soit $(z_1,z_2) \in \widehat{abc}$ tel que $|z_1-z_2|=\delta(\widehat{abc})$ dont l'existence est assurée par B.1.d)
On a alors $|z_1-z_2|=\max\{|z_1-z'| \ / \ z' \in \widehat{abc}\}=\max(|z_1-a|,|z_1-b|,|z_1-c|)$ ce qui prouve qu'on peut toujours choisir z_2 parmi a, b ou c. De même pour z_1 vu le symétrie des rôles joués par z_1 et z_2.
Ainsi $\delta(\widehat{abc})=\max(|a-b|,|b-c|,|c-a|)$ $\square$

B.3) Pour $i=0$ ou 1 on a $\phi_i(\tau) \subset \tau$ d'après la question I.A.4) donc $\phi_{r_{n+1}}(\tau) \subset \tau$ pour tout n donc en composant par $\phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_n}$ il vient $\widetilde{\tau}_{n+1} \subset \widetilde{\tau}_n$.
Par ailleurs toujours par la question I.A.4), $\widetilde{\tau}_n$ est un triangle plein dont le diamètre est, d'après les questions A.3.c) et B.2.b), $d_n=\dfrac{2}{\sqrt{2}^n}$.
Soit la suite (a_n) définie par $a_n=\phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_n}(1)$. Naturellement $a_n \in \widetilde{\tau}_n$. Ainsi $|a_n-a_{n-1}| \leqslant d_{n-1}$ puisque $\widetilde{\tau}_n \subset \widetilde{\tau}_{n-1}$. Comme la série géomérique $\sum d_n$ converge, la série $\sum(a_n-a_{n-1})$ converge absolument donc converge et ainsi la suite (a_n) converge vers une limite notée a.
Soit un entier $k \geqslant 1$ fixé quelconque. Pour $n \geqslant k$ on a que $a_n \in \widetilde{\tau}_n \subset \widetilde{\tau}_k$ donc $a \in \overline{\widetilde{\tau}_k}=\widetilde{\tau}_k$ puisque $\widetilde{\tau}_k$ est un triangle plein donc est fermé par la question B.1.c) . Ainsi $a \in \bigcap\limits_{k\geqslant 1} \widetilde{\tau}_k$.
Soit désormais $b \in \bigcap\limits_{k\geqslant 1} \widetilde{\tau}_k$. Alors $(a,b) \in \widetilde{\tau}_n$ donc $|a-b| \leqslant d_n$ pour tout entier n donc $a=b$.
Ainsi $\bigcap\limits_{k\geqslant 1} \widetilde{\tau}_k$ est bien réduit à un seul point appartenant à τ. $\square$

Partie II. Construction de l'application f.

1) $f_0(x)=2x-1$ de manière immédiate. $\square$

2) Soit $g \in \mathcal{E}$. Il vient :
- $Tg(0)=\phi_0\big(g(0)\big)=\phi_0(-1)=-1$ et $Tg(1)=\phi_1\big(g(1)\big)=\phi_1(1)=1$
- Par composition d'applications continues, les restrictions de Tg à $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ et à $\left]\dfrac{1}{2},1\right]$ sont continues.

En outre $\lim\limits_{x\to 1/2^+} Tg(x)=\lim\limits_{h\to 0^+} \phi_1\big(g(2h)\big)=\phi_1\big(g(0)\big)=\phi_1(-1)=i$ et $Tg(\frac{1}{2})=\phi_0\big(g(1)\big)=\phi_0(1)=i$

ce qui prouve que Tg est bien continue en $\dfrac{1}{2}$ et donc sur $[0,1]$.

- En conclusion $Tg \in \mathcal{E}$ pour tout $g \in \mathcal{E}$. $\square$

3) Si $x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ on a $\big|Tg_2(x)-Tg_1(x)\big|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\big|\overline{g_2(2x)}-\overline{g_1(2x)}\big|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\big|g_2(2x)-g_1(2x)\big|$.
Donc $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in[0,1/2]} \big|Tg_2(x)-Tg_1(x)\big|=\frac{1}{\sqrt{2}}\|g_2-g_1\|_\infty$ puisque $2x$ parcourt $[0,1]$ lorsque x parcourt $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.
De même $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in[1/2,1]} \big|Tg_2(x)-Tg_1(x)\big|=\frac{1}{\sqrt{2}}\|g_2-g_1\|_\infty$ car $2x-1$ parcourt $[0,1]$ lorsque x parcourt $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.
Ainsi $\|Tg_2-Tg_1\|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\|g_2-g_1\|$. $\square$

4.a) Pour n et p entiers positifs quelconques, on a compte tenu de ce qui précède :
$\|f_{n+p}-f_n\|_\infty \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \|f_p-f_0\|_\infty$ et

$$\|f_p-f_0\|_\infty \leqslant \|f_p-f_{p-1}\|_\infty+\ldots+\|f_1-f_0\|_\infty \leqslant \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p-1}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p-2}+\ldots+1\right)\|f_1-f_0\|_\infty$$

donc $\|f_{n+p}-f_n\|_\infty \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times \dfrac{1-\big(1/\sqrt{2}\big)^p}{1-(1/\sqrt{2})} \times \|f_1-f_0\|_\infty \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \|f_1-f_0\|_\infty=\varepsilon_n$
où ε_n est une quantité <u>indépendante de p</u> et tendant vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Cela prouve que la suite (f_n) satisfait au critère de Cauchy de convergence uniforme et donc converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f.

En outre comme les fonctions f_n sont des éléments de $\mathcal{E}$, les fonctions f_n sont continues donc f également par théorème de récupération uniforme de la continuité. Par ailleurs $f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = -1$ car $f_n(0) = -1$ pour tout entier n et de même $f(1) = 1$.
En conclusion la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $f \in \mathcal{E}$. $\square$

4.b) D'après la question II.3), T est une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même lipschitzienne donc continue pour la norme uniforme sur $[0,1]$.
Comme la suite (f_n) converge pour cette norme vers f, il en découle que Tf_n converge vers Tf.
En passant à la limite (uniforme) dans $Tf_n = f_{n+1}$ il vient donc $Tf = f$. $\square$

4.c) On établit par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n$: « $f_n(x) = -\overline{f_n(1-x)} \quad \forall x \in [0,1]$ »
On commence par remarquer que par symétrie de la relation par rapport à $\frac{1}{2}$, il suffit de la vérifier pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
$\mathcal{H}_0$ est vraie car $f_0(x) = 2x - 1$.
Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. Il vient alors pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$-f_{n+1}(1-x) = -Tf_n(1-x) = -\phi_1\Big(f_n\big(2(1-x)-1\big)\Big) = -\phi_1\Big(f_n\big(1-2x\big)\Big) = -\frac{1-i}{2}\,\overline{f_n(1-2x)} - \frac{1+i}{2}$$
$$= \frac{1-i}{2}\,f_n(2x) - \frac{1+i}{2} \text{ par hypothèse de récurrence. Donc}$$
$$-\overline{f_{n+1}(1-x)} = \frac{1+i}{2}\,\overline{f_n(2x)} + \frac{-1+i}{2} = \phi_0\Big(f_n(2x)\Big) = Tf_n(x) = f_{n+1}(x).$$

Ainsi la propriété $\mathcal{H}_n$ est bien établie pour tout entier n et par passage à la limite simple on obtient bien :
$f(x) = -\overline{f(1-x)} \quad \forall x \in [0,1]$. $\square$

Soit γ l'arc paramétré $t \longmapsto f(t)$ pour $t \in [0,1]$. La partie correspondant à $t \geqslant 1/2$ se déduit de la partie $t \leqslant 1/2$ par réflexion par rapport à l'axe des y. $\square$

Partie III. Propriétés de f.

III.A - Image de f

A.1.a) Immédiat car $0 \leqslant \frac{r_n}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geqslant 1$. $\square$

A.1.b) On prouve la relation demandée par récurrence sur p.

- Pour $p = 1$ on a $x_1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{r_{n+1}}{2^n} = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{r_{n+1}}{2^{n+1}} = 2\Big(x - \frac{r_1}{2}\Big) = 2x - r_1$.
Or si $r_1 = 1$ on a nécessairement $x \geqslant 1/2$ de sorte que $\phi_{r_1}\Big(f(x_1)\Big) = \phi_1\Big(f(2x-1)\Big) \underset{\text{DEF}}{=} Tf(x) = f(x)$ (Cf II.4.b)
De même si $r_1 = 0$ alors $x = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} \leqslant \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$ et $\phi_{r_1}\Big(f(x_1)\Big) = \phi_0\Big(f(2x)\Big) \underset{\text{DEF}}{=} Tf(x) = f(x)$
La relation est ainsi établie pour $p = 1$.
- Supposons la relation établie jusqu'au rang $p-1$ avec $p \geqslant 2$.
On établit facilement comme ci-dessus que $x_p = 2x_{p-1} - r_p$ et que si $r_p = 1$ (resp. $r_p = 0$) alors $x_{p-1} \geqslant 1/2$ (resp. $\leqslant 1/2$) donc que (dans les 2 cas) $\phi_{r_p}\Big(f(x_p)\Big) = Tf(x_{p-1}) = f(x_{p-1})$ donc :
$\phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \dots \phi_{r_p}\Big(f(x_p)\Big) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \dots \phi_{r_{p-1}}\Big(f(x_{p-1})\Big) = f(x)$ par hypothèse de récurrence.
- La relation proposée est donc bien établie pour tout entier $p \geqslant 1$. $\square$

A.2.a) Par définition de la partie entière on a $2^n x - 1 < \left[2^n x\right] \leqslant 2^n x$ et $2\Big(2^{n-1}x - 1\Big) < 2\left[2^{n-1}x\right] \leqslant 2^n x$ donc $-1 < \left[2^n x\right] - 2\left[2^{n-1}x\right] < 2$ et ainsi $\left[2^n x\right] - 2\left[2^{n-1}x\right] \in \{0,1\}$ puisqu'il s'agit d'un entier. $\square$

A.2.b) Il vient $\frac{r_n(x)}{2^n} = \frac{\left[2^n x\right]}{2^n} - \frac{\left[2^{n-1}x\right]}{2^{n-1}}$ pour $n \geqslant 1$ donc par télescopage :
$\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2n} = \frac{\left[2^N x\right]}{2^N} - \frac{\left[x\right]}{2} = \frac{\left[2^N x\right]}{2^N}$ car $x \in [0,1[$ $\square$
Or $\frac{2^N x - 1}{2^N} \leqslant \frac{\left[2^N x\right]}{2^N} \leqslant \frac{2^N x}{2^N}$ donc par le principe des gendarmes $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\left[2^N x\right]}{2^N} = x$.
En d'autres termes $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n(x)}{2^n} = x \quad \forall x \in [0,1[$ $\square$

A.2.c) Soit $x = \dfrac{k}{2^N} \in \mathbb{Z}\Big[\dfrac{1}{2}\Big]$ avec $2 \wedge k = 1$.

Pour $n > N$ on a que $2^n x$ et $2^{n-1}x$ sont deux entiers donc $r_n(x) = \big[2^n x\big] - 2\big[2^{n-1}x\big] = 0$ $\square$

A.2.d) • Pour $x = \dfrac{1}{2}$ on a $r_1(x) = 1$ et $r_n(x) = 0$ pour $n \geqslant 2$. En d'autres termes $x_1 = 0$ donc par la question III.A.1.b), il vient $f\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \phi_1\Big(f(0)\Big) = \phi_1(-1) = i$. $\square$

• Pour $x = \dfrac{1}{4}$ on a $r_1(x) = 0$, $r_2(x) = 1$ et $r_n(x) = 0$ pour $n \geqslant 3$. Donc $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 0$ d'où:

$f\Big(\dfrac{1}{4}\Big) = \phi_0 \circ \phi_1\Big(f(0)\Big) = \phi_0 \circ \phi_1(-1) = \phi_0(i) = 0$ $\square$

• Avec les notations de I.A.3.c), on a $\phi_0 = h_0 \circ s_0 = s_0 \circ h_0$ donc $\phi_0 \circ \phi_0 = h_0 \circ h_0$ c'est à dire c'est l'homothétie de centre -1 et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

Soit désormais $x = \dfrac{1}{2^k}$ avec $k \geqslant 3$. Il vient $r_k(x) = 1$ et $r_n(x) = 0$ pour $n \neq k$ de sorte que $x_k = 0$, $x_{k-1} = \dfrac{1}{2}$, $x_{k-2} = \dfrac{1}{2}$ ... et $x_1 = \dfrac{1}{2^{k-1}}$. Donc $f\Big(\dfrac{1}{2^k}\Big) = \underbrace{\phi_0 \circ \phi_0 \circ \ldots \phi_0}_{k-1 \text{ fois}} \circ \phi_1\Big(f(0)\Big) = \underbrace{\phi_0 \circ \phi_0 \circ \ldots \phi_0}_{k-1 \text{ fois}}(i)$

Si k est impair il en découle que $f\Big(\dfrac{1}{2^k}\Big) = -1 + \dfrac{i+1}{2^{(k-1)/2}}$ puisque $\underbrace{\phi_0 \circ \phi_0 \circ \ldots \phi_0}_{k-1 \text{ fois}}$ est l'homothétie de centre -1 et de rapport $\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{(k-1)/2}$.

Si k est pair on a $f\Big(\dfrac{1}{2^k}\Big) = \underbrace{\phi_0 \circ \phi_0 \circ \ldots \phi_0}_{k-2 \text{ fois}}(0) = -1 + \dfrac{1}{2^{(k-2)/2}}$

En conclusion $f\Big(\dfrac{1}{2^{2n}}\Big) = -1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$ $\forall n \geqslant 1$ et $f\Big(\dfrac{1}{2^{2n+1}}\Big) = -1 + \dfrac{i+1}{2^n}$ $\forall n \geqslant 0$ $\square$

A.3.a) Si $x \in \big]0,1\big[\cap \mathbb{Z}\Big[\dfrac{1}{2}\Big]$ on sait qu'il existe $N \geqslant 1$ tel que $r_n(x) = 0$ pour $n > N$ de sorte que (question III.A.1.b)

$f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_N}\Big(f(0)\Big) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_N}(-1)$

et comme τ est stable par chaque ϕ_{r_i} on a bien que $f(x) \in \tau$.

C'est naturellement encore vrai si $x = 0$ ou $x = 1$ (car $f \in \mathcal{E}$) et ainsi $f\left(\big[0,1\big] \cap \mathbb{Z}\Big[\dfrac{1}{2}\Big]\right) \subset \tau$ $\square$

A.3.b) Soit $x \in \big[0,1\big] \setminus \mathbb{Z}\Big[\dfrac{1}{2}\Big]$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{r_n}{2^n}$ son développement binaire (question III.A.2.b). Alors $\Big(\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{r_n}{2^n}\Big)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $\mathbb{Z}\Big[\dfrac{1}{2}\Big]$ qui converge vers x. Donc par continuité de f la suite $\left(f\Big(\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{r_n}{2^n}\Big)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Or cette suite est une suite d'éléments de τ par la question précédente et donc sa limite $f(x)$ également puisque τ est un fermé. En conclusion finale $f(\big[0,1\big]) \subset \tau$. $\square$

A.4.a) ϕ_0 (resp. ϕ_1) est une <u>bijection</u> de τ sur τ_0 (resp. τ_1). En effet ce sont deux bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et $\phi_i(\tau) = \tau_i$ comme déjà noté. Donc si $z_{n-1} \in \tau_0$ alors $z_n = \phi_0^{-1}(z_{n-1})$ est parfaitement défini et appartient bien à τ. De même si $z_{n-1} \notin \tau_0$ alors $z_{n-1} \in \tau_1$ (car $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$ comme déjà vu) et donc $z_n = \phi_1^{-1}(z_{n-1})$ est bien défini et appartient à τ.

Ainsi les suites (r_n) et (z_n) sont définies (de manière unique) par itération et $z_n \in \tau$ pour tout entier n. $\square$

A.4.b) Par construction de la suite (z_n) et de la suite (r_n) on a $z = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_n}(z_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Par ailleurs avec les notations du III.a.1.b) on a $f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_n}\Big(f(x_n)\Big)$.

Il en découle que $f(x)$ et z appartiennent tous deux à $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} \widetilde{\tau}_n$ donc $f(x) = z$ par la question I.B.3). $\square$

A.4.c) Comme un antécédent de z est $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{r_n}{2^n}$, il suffit de calculer $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{r_n}{2^n}$ avec N tel que $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^N} < \varepsilon$

D'où l'algorithme suivant :

```
prec <- 1/2
X <- 0
Z <- z
Tant que (prec > epsilon) faire
  Si (Re(Z) <= 0)
    alors Z <- (1+I)*(conjugué(z)+(1+I)/2)
    sinon Z <- (1-I)*(conjugué(z)+(-1+I)/2)
          X <- X+prec
  Fin si
  prec <- prec/2
Fin tant que
-> X
```

A.5.a) On a vu que $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=0$ donc $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\overline{0}=0=f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ ce qui prouve que f n'est pas injective. $\square$

A.5.b) Supposons qu'il existe une bijection continue g de $J=\big[0,1\big]$ sur τ.

- Alors g^{-1} est une application continue de τ sur J.
En effet supposons g^{-1} non continue. Alors il existe $z_0\in\tau$, une suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de τ et un réel $\alpha>0$ tels que la suite (z_n) converge vers z_0 et $|g^{-1}(z_n)-g^{-1}(z_0)|\geqslant\alpha$ pour tout $n\geqslant 1$. Notons $x_n=g^{-1}(z_n)$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ en tant que suite du compact J admet une suite extraite (y_n) avec $y_n=x_{\varphi(n)}$ qui converge vers un élément noté y_0 de J. Or comme g est continue sur J donc en y_0 on a que la suite $\big(g(y_n)\big)$ converge vers $g(y_0)$. Mais par ailleurs $g(y_n)=g\big(g^{-1}(z_{\varphi(n)})\big)=z_{\varphi(n)}$ converge vers z_0 en tant que suite extraite de la suite (z_n) qui converge vers z_0. Il en découle que $g(y_0)=z_0$ donc que $y_0=g^{-1}(z_0)$.
Mais alors $|y_n-y_0|=|g^{-1}(z_{\varphi(n)})-g^{-1}(z_0)|\geqslant\alpha$ pour tout $n\geqslant 1$ ce qui en contradiction avec le fait que la suite (y_n) converge vers y_0.

- Il existe au moins un sommet de τ que nous noterons a différent de $g(0)$ et de $g(1)$ en d'autres termes tel que $g^{-1}(a)=s\in\big]0,1\big[$. La restriction h de g^{-1} à $\tau'\underset{\text{DEF}}{=}\tau\setminus\{a\}$ est continue sur τ' (en tant que restriction de l'application continue g^{-1}) et τ' est encore convexe donc a fortiori connexe par arcs. Or $h(\tau')=J\setminus\{s\}$ non connexe par arcs puisque $s\in\overset{\circ}{J}$. Ce qui fournit la contradiction finale. $\square$

A.6.a) On a déjà noté géométriquement (grâce à la question I.A.3.c) que $\phi_0\circ\phi_0$ est l'homothétie de centre -1 et de rapport $\dfrac{1}{2}$ donc s'écrit $z\longmapsto\dfrac{1}{2}(z-1)$.

On prouve exactement de même que $\phi_1\circ\phi_1$ est l'homothétie de centre 1 et de rapport $\dfrac{1}{2}$ qui s'écrit $z\longmapsto\dfrac{1}{2}(z+1)$.

Il vient par un calcul immédiat que $\phi_0\circ\phi_1(z)=\dfrac{i}{2}(z+1)$. Donc $a=\dfrac{-1+2i}{5}$ est point fixe et il s'agit de la similitude directe de centre a, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

De même $\phi_1\circ\phi_0(z)=-\dfrac{i}{2}(z-1)$ et il s'agit de la similitude directe de centre $b=\dfrac{1+2i}{2}$, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. $\square$

A.6.b) Première démonstration :
ϕ_0 et ϕ_1 sont des applications affines dont l'application linéaire associée multiplie les normes par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc l'application linéaire associée à ϕ les multiplie par $\dfrac{1}{(\sqrt{2})^p}$. Il en découle que 1 n'est pas valeur propre donc classiquement ϕ admet un point fixe et un seul. $\square$

Deuxième démonstration :
ϕ est une application contractante de $\mathbb{C}$ dans lui-même et $\mathbb{C}$ est complet. D'où la conclusion par le théorème du point fixe. $\square$

A.6.c) Soit x le réel de développement dyadique périodique $0,r_1r_2\ldots r_pr_1r_2\ldots r_pr_1r_2\ldots r_p\ldots$.
Alors $x=x_p$ et la relation fondamentale du III.A.1.b) s'écrit $f(x)=\phi\Big(f(x)\Big)$ ce qui prouve que $f(x)$ est un (donc le) point fixe de ϕ. $\square$

A.6.d) Soit $z_0 \in \tau$, $\varepsilon > 0$ donné quelconque et $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = z_0$ (licite puisque on a vu que f est surjective de $[0,1]$ sur τ)

Comme f est continue il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$ (et $x \in [0,1]$) implique $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$

Soient alors $0, r_1 r_2 \ldots r_n \ldots$ le développement dyadique de x_0, p tel que $\dfrac{1}{2^p} \leqslant \alpha$ et x le réel de développement dyadique périodique $x = 0, r_1 r_2 \ldots r_p r_1 r_2 \ldots r_p r_1 r_2 \ldots r_p \ldots$.

Alors $f(x)$ est point fixe de $\phi_1 \circ \phi_2 \circ \ldots \circ \phi_p$ et $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - z_0| \leqslant \varepsilon$ $\square$

III.B - Dérivabilité de f

B.1) Supposons f dérivable en $x \in [0,1]$ (pas forcément sur $[0,1)$). Alors elle y admet un développement limité à l'ordre 1 qui s'écrit $f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + (y-x)\varepsilon(y-x)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Donc $\dfrac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x) + \varepsilon'_n$ avec $\varepsilon'_n = \dfrac{(\beta_n - x)\varepsilon(\beta_n - x) - (\alpha_n - x)\varepsilon(\alpha_n - x)}{\beta_n - \alpha_n}$.

Notons $\widetilde{\varepsilon}_n = \max\Big(|\varepsilon(\beta_n - x)|, |\varepsilon(\alpha_n - x)|\Big)$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \widetilde{\varepsilon}_n = 0$ et :

$|\epsilon'_n| \leqslant \dfrac{(\beta_n - x)\widetilde{\varepsilon}_n + (x - \alpha_n)\widetilde{\varepsilon}_n}{\beta_n - \alpha_n}$ (car $\alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n$) donc $|\varepsilon'_n| \leqslant \widetilde{\varepsilon}_n$ et ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon'_n = 0$. $\square$

B.2.a) Soit $x \in [0,1[$ de développement dyadique $x = 0, r_1 r_2 \ldots r_n \ldots$. On envisage les 2 suites (α_n) et (β_n) de développements dyadiques $\alpha_n = 0, r_1 r_2 \ldots r_n 000 \ldots$ et $\beta_n = 0, r_1 r_2 \ldots r_n 111 \ldots$ de sorte que l'on se trouve bien dans les conditions de la question précédente ($\alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n$ et $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$).

Notons $\phi = \phi_{r_1} \circ \phi r_2 \circ \ldots \circ \phi_{r_n}$.

La relation fondamentale III.A.1.b) fournit $f(\alpha_n) = \phi\Big(f(0)\Big) = \phi(-1)$ et $f(\beta_n) = \phi\Big(f(1)\Big) = \phi(1)$

Ainsi $\dfrac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = 2^n\Big(\phi(1) - \phi(-1)\Big)$ dont le module tend vers $+\infty$ car ϕ est une bijection affine donc en particulier est injective donc $\phi(1) - \phi(-1) \neq 0$.

La question précédente montre alors que f n'est pas dérivable en x. $\square$

B.2.b) Si f était dérivable (à gauche) en 1, en vertu de la relation $f(x) = -\overline{f(1-x)}$, elle serait dérivable (à droite) en 0 ce qui n'est pas par la question précédente. $\square$

FIN