Ecole Polytechnique MP 2000

Première composition de Mathématiques

Première partie

1.a) Si $\exists M>0 \quad |u_k| \le M^k$ alors $\left(u_k \left(\frac{1}{M}\right)^k\right)_{k\geq 1}$ est bornée, donc d'après le lemme d'Abel $r(u) \geq \frac{1}{M} > 0$

Réciproquement, si $r(u)>0$, soit $r<r(u)$. La suite $(u_k r^k)_{k\geq 1}$ est bornée. Il existe $M_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ $\forall k \quad |u_k r^k| \le M_1$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |u_k| \le \frac{M_1}{r^k} \le \left(\frac{\max(1, M_1)}{r}\right)^k = M^k, \quad M>0.$

1.b) Supposons $\forall k \quad |u_k| \geq M^k$ pour un $M>0$.

Soit $r > \frac{1}{M}$ alors $|u_k r^k| \geq (Mr)^k$ avec $\lim\limits_{k\to+\infty} (Mr)^k = +\infty$

Donc $r > \frac{1}{M} \Rightarrow (u_k r^k)_{k\geq 1}$ non bornée, soit $r(u) \le \frac{1}{M}$

2)
$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2(k-i)^2} \le 2\times \sum_{i=1}^{\lceil \frac{k}{2}\rceil} \frac{1}{i^2(k-i)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2(k-i)^2} \le 2\times \sum_{i=1}^{\lceil \frac{k}{2}\rceil} \frac{1}{i^2} \times \frac{1}{\left(k-\lceil \frac{k}{2}\rceil\right)^2}$$

or $\displaystyle\sum_{i=1}^{\lceil \frac{k}{2}\rceil} \frac{1}{i^2} \le \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} \left(=\frac{\pi^2}{6}\right)$

et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{k^2}{\left(k-\lceil \frac{k}{2}\rceil\right)^2} = 4$ donc $\exists M \quad \frac{k^2}{\left(k-\lceil \frac{k}{2}\rceil\right)^2} \le M$

et $$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2(k-1)^2} \le 2\times\frac{\pi^2}{6}\times M \times \frac{1}{k^2} = \gamma\frac{1}{k^2}.$$

Deuxième partie

3) $\{A_a u\} = 0 \iff \forall k \quad (k+a)\, u_k = 0$

$$\iff \begin{cases} \forall k \quad u_k = 0 & \text{si } a \notin -\mathbb{N}^* \ (= \mathbb{Z}^{*-}) \\ \forall k \neq -a \quad u_k = 0 & \text{si } a \in \mathbb{Z}^{*-} \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} A_a = \{0\}$ si $a \notin \mathbb{Z}^{*-}$

$\operatorname{Ker} A_a = \mathbb{C}\, e_{-a}$ si $a \in \mathbb{Z}^{*-}$ avec $e_i = (\delta_{i,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$

De même.

Si $a \notin \mathbb{Z}^{*-}$ $\quad \operatorname{Im} A_a = E \quad \left((A_a^{-1} u)_k = \left(\frac{1}{k+a} u_k \right) \right)$

Si $a \in \mathbb{Z}^{*-}$ $\quad \operatorname{Im} A_a = \{ u \in E,\ u_{-a} = 0 \}$

(antécédant $(\cancel{\tfrac{1}{k+a}} v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$

$v_k = \frac{1}{a+k} u_k$ si $k \neq -a \quad v_{-a} = 0$)

4) + Soit $u \in E_R$ $\quad r(u) \leq R$. Soit $r < R$ alors il existe r' tel que $r < r' < R$.

$(u_k r'^k)_{k \geq 1}$ est bornée.

Or $\quad u_k (k+a) r^k = u_k r'^k \times \underbrace{(k+a)\left(\frac{r}{r'}\right)^k}_{\text{tend vers } 0}$

donc $(u_k (k+a) r^k)_{k \geq 0}$ est bornée et $r(A_a u) \geq r$.

Finalement $\quad r < R \Rightarrow r(A_a u) \geq r$

donc $\quad r(A_a u) \geq R$

et $\quad A_a u \in E_R \qquad A_a(E_R) \subset E_R$.

+ Si $a \in \mathbb{Z}^{*-}$. A_a est une bijection de E sur lui-même

et $A_a^{-1} u = \left(\frac{1}{k+a} u_k \right)_{k \geq 1}$ donc si $r < r(u)$ $\left(\frac{1}{k+a} u_k r^k \right)_{k \geq 1}$

est bornée et $r(A_a^{-1} u) \cancel{\leq} \geq r(u)$ en particulier $A_a^{-1}(E_R) \subset E_R$.

En conclusion A_a est un isomorphisme de E_R sur lui même

Troisième partie

5.a) $(Tu)_1 = (1+a)\,u_1 = v_1$.

Donc $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{1+a}\,v_1}$.

$$v_k = (Tu)_k = (k+a)\,u_k + c\sum_{i=1}^{k-1} u_i\,u_{k-i}$$

$$\boxed{u_k = \frac{1}{k+a}\left(v_k - c\sum_{i=1}^{k-1} u_i\,u_{k-i}\right)}$$

5.b) Il résulte immédiatement du calcul précédent que T est bijective et en conséquence injective et surjective.

6.a) On a vu en 4) que le rayon de convergence de $T_a u$ était au moins égal à celui de u.

. le rayon de convergence de $\sum_{k\geq 1} (u * u)_k\,x^k$, est le rayon de convergence du produit de Cauchy de $\sum u_k x^k$ par elle-même, il est donc au moins égal à $R(u)$. Il ne change pas en multipliant tous les coefficients par c, non nul. (Si $c=0$ le rayon de convergence est infini)

. le rayon de convergence de (Tu) est celui d'une somme de séries entières. Il vaut donc au moins $\max(R(u), R(u)) = R(u)$

Donc $\boxed{R(T(u)) \geq R(u)}$ et en particulier

$$\boxed{T(E_+) \subset E_+}$$

6.b)

① Si $a \notin \mathbb{Z}^{*-}$ + Soit $a \geq 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $|k+a| \geq 1 = \delta > 0$

+ Soit $\exists p \in \mathbb{Z}^{*-}$ $p < a < p+1$ et

dans ce cas $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $k+a \geq \min(p+1-a, a-p) = \delta > 0$

Il existe donc $\delta > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $|k+a| \geq \delta$ et on peut supposer $\delta \leq 1$

② Un tel δ ayant été fixé en ① il suffit de prendre n_0 tel que $0 < n_0 \leq \frac{\delta}{2|c|\gamma}$

③ Un tel M existe puisque $Tu = v$ est dans E_+

④ Pour que cette condition soit vérifiée il suffit que $M_1 \geq \frac{M}{\delta n_0}$

⑤ On cherche M_1 tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $M_1 \geq \left(\frac{2k^2}{\delta n_0}\right)^{\frac{1}{k}} M$

Or $\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{2k^2}{\delta n_0}\right)^{\frac{1}{k}} M$ existe donc la suite

$\alpha = (\alpha_k)_{k \geq 1} = \left(\left(\frac{2k^2}{\delta n_0}\right)^{\frac{1}{k}} M\right)_{k \geq 1}$ est bornée.

Pour avoir $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\delta n_0 M_1^k \geq 2k^2 M^k$ il suffit donc de choisir $M_1 \geq \sup_{k \geq 1} \alpha_k$

Pour avoir ④ et ⑤ il suffit de choisir $M_1 \geq \max\left(\frac{M}{\delta n_0}, \sup_{k \geq 1} \alpha_k\right)$

Il existe donc bien δ, M, n_0 et M_1 strictement positifs satisfaisant ①, ②, ③, ④ et ⑤.

6.c) Montrons par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \; |u_k| \leq \frac{\Pi_0 M_1^k}{k^2}}$ (5)

- Pour $k = 1$ $\quad |u_1| = |v_1| \leq M = \delta \Pi_0 M_1 \leq \frac{\Pi_0 \Pi_1^1}{1^2}$ (car on a supposé $\delta \leq 1$)

- On suppose le résultat vrai pour tout i, $1 \leq i \leq k-1$.

Alors $|u_k| \leq \frac{1}{|k+a|} \left(|v_k| + |c| \sum_{i=1}^{k-1} |u_i| |u_{k-i}| \right)$

$$\leq \frac{1}{|k+a|} \left(M^k + |c| \, \Pi_0^2 M_1^k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2 (k-i)^2} \right)$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{\delta \Pi_0 \Pi_1^k}{2k^2} + \frac{2|c| \gamma M_0}{2k^2} \Pi_0 \Pi_1^k \right)$$

$$\leq \frac{\cancel{\delta}}{\delta} \left(\frac{\delta \Pi_0 \Pi_1^k}{2k^2} + \frac{\delta}{2k^2} \Pi_0 \Pi_1^k \right)$$

$$\boxed{|u_k| \leq \frac{\Pi_0 \Pi_1^k}{k^2}}$$

le résultat est vrai à l'ordre k.

q.e.d

6.d) Il existe $\Pi_1 > 0$ tel que $\left((u_k) \times \left(\frac{1}{\Pi_1}\right)^k \right)_{k \geq 1}$ soit bornée.

donc $r(U) \geq \frac{1}{M_1} > 0$ et $u \in E_+$

$\forall v \in E_+ \; \exists u \in E_+ \quad v = Tu$.

Donc $T(E_+) \supset E_+$, et d'après 6.a) $T(E_+) \subset E_+$.

Finalement $T(E_+) = E_+$ et T est bijective, donc

$\boxed{T \text{ est une bijection de } E_+ \text{ sur } E_+}$

7a) Exemple. $a = 0 \quad c = -1 \quad v = \lambda e_1 \quad \lambda \in \mathbb{R}^{*+}$

$$u_1 = v_1 = \lambda = \alpha_1 \lambda \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = 1.$$

$\forall k \geq 2 \quad v_k = 0$

$$\forall k \geq 2 \qquad u_k = \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}\right)$$

Si on suppose $u_i = \alpha_i \lambda^i$ pour $1 \leq i \leq k-1$

On obtient bien $\boxed{u_k = \alpha_k \lambda^k}$ avec

$$\boxed{\alpha_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \alpha_{k-i}}.$$

Montrons par récurrence que $\forall k \quad 2^{1-k} \leq \alpha_k \leq 1$.

Cela est vrai pour $k = 1$.

On suppose le résultat vrai pour $1 \leq i \leq k-1$.

alors

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} 2^{2-k} \leq \alpha_k \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} 1 \times 1 = \frac{k-1}{k} \leq 1$$

$$\boxed{2^{1-k} \leq \frac{2(k-1)}{k} 2^{1-k} \leq \alpha_k \leq 1}$$ car $2(k-1) \geq k$ si $k \geq 2$

7b)

$$2\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^k \leq u_k r^k \leq (\lambda r)^k$$

Si $r < \frac{1}{\lambda}$ $(u_k r^k)_{k \geq 1}$ est bornée donc $r(v) \geq \frac{1}{\lambda}$

Si $r > \frac{2}{\lambda}$ $(u_k r^k)_{k \geq 1}$ n'est pas bornée donc $r(v) \leq \frac{2}{\lambda}$

En conclusion $\boxed{\frac{1}{\lambda} \leq r(u) \leq \frac{2}{\lambda}}$

Quatrième partie

8) Sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$ les solutions de $Df=0$ sont les fonctions $f : t \mapsto C \exp\left(-a\int \frac{dt}{t}\right)$, c'est-à-dire

$$f : t \mapsto C e^{-a \ln|t|} \qquad C \text{ parcourant } \mathbb{C}$$

9) Une telle fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I (où $I =]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$) avec

$$f^{(n)}(t) = C(-a)(-a-1) \qquad (-a-n+1)\, e^{-(a+n)\ln t}$$

sur $]0,+\infty[$, si $n \geq 1$.

$$f^{n}(t) = (-1)^n C(-a)(-a-1) \qquad (-a-n+1)\, e^{-(a+n)\ln(-t)}$$

sur $]0,+\infty[$, si $n \geq 1$

Si f est non nulle $C \neq 0$ (et réciproquement)

Si a n'est pas un entier négatif, alors pour tout n $(-a)(-a-1) \qquad (-a-n+1)$ est non nul et il existe un entier n tel que $a+n > 0$.

Pour ce n $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\(0^+ \text{ ou } 0^-)}} f^{(n)}(t) = +\infty$, donc f ne peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, encore moins en une solution $\mathcal{C}^\infty$ de $Df=0$ sur $\mathbb{R}$.

Si a est un entier négatif. Alors les fonctions $t \mapsto C_+ t^{-a}$ et $t \mapsto C_-(-t)^{-a}$ ne peuvent être recollées en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ que d'une unique manière en prenant $C_+ = C_-(-1)^{(-a)}$ (condition de continuité de $f^{(-a)}$).

Réciproquement $t \mapsto Ct^{-a}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $Df=0$ de classe $\mathcal{C}^\infty$

La condition sur a est $a \in \mathbb{Z}^{-*}$

10) $Df = g \iff \forall t \in I \quad t f'(t) + a f(t) = g(t)$

$\iff \forall t \in I \quad t^a f'(t) + a t^{a-1} f(t) = t^{a-1} g(t)$

$\iff \forall t \in I \quad (t^a f(t))' = t^{a-1} g(t).$

$\iff \forall t \in I \quad t^a f(t) - t_0^a f(t_0) = \int_{t_0}^{t} s^{a-1} g(s)\,ds$

(Théorème fondamental de l'analyse car $t \to t^{a-1} g(t)$ est continue sur I et $t \to t^a f(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I)

$$\boxed{Df = g \iff f(t) = t^{-a} t_0^a \underbrace{f(t_0)}_{=\alpha} + t^{-a} \int_{t_0}^{t} s^{a-1} g(s)\,ds}$$

11) La série entière $\sum_{k \geq 1} v_k t^k$ possède un rayon de convergence au moins égal à θ. Pour tout $(t_0, t) \in I^2$ elle converge donc uniformément sur le segment $J = [\min(t_0, t), \max(t_0, t)]$. Puisque la fonction $s \mapsto s^{a-1}$ est bornée sur J, on conserve la convergence uniforme sur le segment J.

On peut donc permuter intégration et sommation et

$$f(t) = \alpha t_0^a t^{-a} + t^{-a} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+a} t^{k+a} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+a} t_0^{k+a} \right)$$

(La division par $k+a$ pour prendre la primitive est possible car a n'est pas un entier négatif).

$$f(t) = \left(\alpha - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+a} \right) t_0^a t^{-a} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+a} t^k}_{\text{somme d'une série entière de rayon de convergence au moins } \theta}$$

la fonction $t \mapsto t^{-a}$ ne pouvant pas être prolongée sur $[0, \theta[$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (Voir question 3), la seule possibilité pour que f soit sur $]0, \theta[$ la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins θ est $\boxed{\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+a}}$

12. a) Si $a<0$, $\forall \alpha$ $\lim_{t\to 0} t^{-a} t_0^{a} \alpha = 0$

Il ne reste donc qu'à déterminer.

$$\lim_{t\to 0} t^{-a} \int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds$$

(On a inversé les bornes d'intégration pour profiter de $t<t_0$ lorsque t tend vers 0)

$\lim_{t\to 0} g(t)=0$ et g est continue sur $]0,t_0]$. Elle est donc prolongeable en une fonction continue sur $[0,t_0]$, qui est donc bornée.

$\exists M \in \mathbb{R}^+$ $\forall s \in]0,t_0]$ $|g(s)|\leq M$

Soit $\varepsilon>0$ $\exists \eta$ $\forall t \in]0,\eta[$ $|g(s)|<\frac{\varepsilon}{2}|a|$

Fixons un tel η.

$\forall t \in]0,\eta[$ $\left|t^{-a}\int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds\right| \leq \left|t^{-a}\int_t^{\eta} s^{a-1} g(s)\, ds\right| + \left|t^{-a}\int_\eta^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds\right|$

$$\left|t^{-a}\int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds\right| \leq t^{-a}\int_t^{\eta} s^{a-1}|g(s)|\, ds + t^{-a}\underbrace{\int_\eta^{t_0} s^{a-1}|g(s)|\, ds}_{=K(\eta)}$$

$$\leq t^{-a}\left[\frac{1}{a} s^{a}\, \varepsilon M\right]_t^{t_0} + t^{-a}K(\eta)$$

$$\leq -\frac{1}{a}|a|\frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{1}{a}|a|\, t^{-a} t_0^{a}\frac{\varepsilon}{2}}_{<0} + t^{-a}K(\eta)$$

$\forall t \in]0,\eta[$ $\left|t^{-a}\int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + t^{-a}K(\eta)$

Or $\lim_{t\to 0} t^{-a}K(\eta)=0$ donc $\exists \eta_1 (<\eta)$ $\forall t \in]0,\eta_1[$ $t^{-a}K(\eta)<\frac{\varepsilon}{2}$

En conclusion on :

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta_1\ \forall t \in]0,\eta_1[\ \left|t^{-a}\int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds\right| < \varepsilon$$

c'est à dire $\lim_{t\to 0} t^{-a}\int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds = 0$

$\lim_{t\to 0} t^{-a}\int_{t_0}^{t} s^{a-1} g(s)\, ds = 0$

et finalement $\boxed{\lim_{t\to 0} f(t)=0}$ $(\forall \alpha \in \mathbb{C})$

12. b) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{g(t)}{t} = \tilde{g}'_d(0)$ existe, la fonction

$t \mapsto \frac{g(t)}{t}$ peut donc être prolongée en une fonction continue

sur $[0,\theta[$, notée h.

$\forall t \in I \quad f(t) = t^{-a} t_0^{a} \alpha + t^{-a} \int_{t_0}^{t} s^a h(s)\, ds$

Puisque $s \mapsto s^a h(s)$ est continue sur $[0,\theta[$ (car $a>0$)

$\lim\limits_{t\to 0} \int_{t_0}^{t} s^a h(s)\, ds = \int_{t_0}^{0} s^a h(s)$ existe.

Or $\forall t \in I \quad f(t) = t^{-a} \left(t_0^{a} \alpha + \int_{t_0}^{t} s^a h(s)\, ds \right)$

Or $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{-a} = +\infty$, donc pour que $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$ existe

il est nécessaire que $\alpha = -t_0^{-a} \int_{t_0}^{0} s^a h(s)\, ds = t_0^{-a} \int_{0}^{t_0} s^a h(s)\, ds$

On a alors

$$\forall t \in I \quad f(t) = t^{-a} \int_0^t s^a h(s)\, ds$$

h est bornée sur $[0, \frac{\theta}{2}]$. $\left(\forall s \in [0,\frac{\theta}{2}] \quad |h(s)| \leq K\right)$

On a alors

$$\forall t \in \left]0, \frac{\theta}{2}\right] \quad |f(t)| \leq t^{-a} \int_0^t s^a K\, ds = \frac{t^{-a} t^{a+1}}{a+1} K.$$

$$\forall t \in \left]0, \frac{\theta}{2}\right] \quad |f(t)| \leq \frac{K}{a+1} t$$

et $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0$