12 . a) Si $a < 0$, $\forall \alpha$ $\lim_{t \to 0} t^{-a} t_0^{a} \alpha = 0$ (9)

Il ne reste donc qu'à déterminer.

$$\lim_{t \to 0} t^{-a} \int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds$$

(On a inversé les bornes d'intégration pour ~~profiter de~~ $t < t_0$ lorsque t tend vers 0)

$\lim_{t \to 0} g(t) = 0$ et g est continue sur $]0, t_0]$. Elle est donc prolongeable en une fonction continue sur $[0, t_0]$, qui est donc bornée.

$\exists M \in \mathbb{R}^+$ $\forall s \in]0, t_0]$ $|g(s)| \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \eta$ $\forall t \in]0, \eta[$ $|g(s)| < \frac{\varepsilon}{2} |a|$

Fixons un tel η.

$\forall t \in]0, \eta[$ $\left| t^{-a} \int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds \right| \leq \left| t^{-a} \int_t^{\eta} s^{a-1} g(s)\, ds \right| + \left| t^{-a} \int_{\eta}^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds \right|$

$$\left| t^{-a} \int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds \right| \leq t^{-a} \int_t^{\eta} s^{a-1} |g(s)|\, ds + t^{-a} \underbrace{\int_{\eta}^{t_0} s^{a-1} |g(s)|\, ds}_{= K(\eta)}$$

$$\leq t^{-a} \left[\frac{1}{a} s^{a} \tfrac{\varepsilon}{2}|a| \right]_t^{t_0} + t^{-a} K(\eta)$$

$$\leq -\frac{1}{a} |a| \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{1}{a} |a| t^{-a} t_0^{a} \frac{\varepsilon}{2}}_{< 0} + t^{-a} K(\eta)$$

$\forall t \in]0, \eta[$ $\left| t^{-a} \int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + t^{-a} K(\eta)$

Or $\lim_{t \to 0} t^{-a} K(\eta) = 0$ donc $\exists \eta_1 (< \eta)$ $\forall t \in]0, \eta_1[$ $t^{-a} K(\eta) < \frac{\varepsilon}{2}$

En conclusion :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_1\ \forall t \in]0, \eta_1[\ \left| t^{-a} \int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds \right| < \varepsilon$$

c'est à dire $\lim_{t \to 0} t^{-a} \int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds = 0$

$\lim_{t \to 0} t^{-a} \int_{t_0}^{t} s^{a-1} g(s)\, ds = 0$

et finalement $\lim_{t \to 0} f(t) = 0$ $(\forall \alpha \in \mathbb{C})$

12 . a) Si $a<0$, $\forall \alpha \quad \lim_{t\to 0} t^{-a} t_0^{a} \alpha = 0$

Il ne reste donc qu'à déterminer.

$$\lim_{t\to 0} t^{-a} \int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\, ds$$

(On a inversé les bornes d'intégration pour profiter de $t<t_0$ lorsque t tend vers 0)

$\lim_{t\to 0} g(t)=0$ et g est continue sur $]0,t_0]$. Elle est donc prolongeable en une fonction continue sur $[0,t_0]$, qui est donc bornée.

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall s\in]0,t_0] \quad |g(s)|\le M$$

Soit $\varepsilon>0$ $\quad \exists \eta \quad \forall t \in]0,\eta[\quad |g(s)| < \frac{\varepsilon}{2}|a|$

Fixons un tel η.

$$\forall t \in]0,\eta[\quad \left|t^{-a}\int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\,ds\right| \le \left|t^{-a}\int_t^{\eta} s^{a-1} g(s)\,ds\right| + \left|t^{-a}\int_\eta^{t_0} s^{a-1} g(s)\,ds\right|$$

$$\left|t^{-a}\int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\,ds\right| \le t^{-a}\int_t^{\eta} s^{a-1} |g(s)|\,ds + t^{-a}\underbrace{\int_\eta^{t_0} s^{a-1} |g(s)|\,ds}_{=K(\eta)}$$

$$\le t^{-a}\left[\frac{1}{a} s^{a} \varepsilon |a| \right]_t^{t_0} + t^{-a}K(\eta)$$

$$\le -\frac{1}{a}|a|\frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{1}{a}|a|\, t^{-a} t_0^{a}\frac{\varepsilon}{2}}_{<0} + t^{-a}K(\eta)$$

$$\forall t\in]0,\eta[\quad \left|t^{-a}\int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\,ds\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + t^{-a}K(\eta)$$

Or $\lim_{t\to 0} t^{-a}K(\eta)=0$ donc $\exists \eta_1 (<\eta) \quad \forall t \in]0,\eta_1[\quad t^{-a}K(\eta) < \frac{\varepsilon}{2}$

En conclusion :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \eta_1 \quad \forall t \in]0,\eta_1[\quad \left|t^{-a}\int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\,ds\right| < \varepsilon$$

c'est à dire $\lim_{t\to 0} t^{-a}\int_t^{t_0} s^{a-1} g(s)\,ds = 0$

$\lim_{t\to 0} t^{-a}\int_{t_0}^{t} s^{a-1} g(s)\,ds = 0$

et finalement $\boxed{\lim_{t\to 0} f(t)=0} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C})$

12. β) $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t} = \tilde{g}'_d(0)$ existe, la fonction

$t \mapsto \frac{g(t)}{t}$ peut donc être prolongée en une fonction continue sur $[0,\theta[$, notée h.

$$\forall t \in I \quad f(t) = t^{-a} t_0^a \alpha + t^{-a} \int_{t_0}^{t} s^a h(s)\, ds$$

Puisque $s \mapsto s^a h(s)$ est continue sur $[0,\theta[$ (car $a>0$)

$\lim_{t\to 0} \int_{t_0}^{t} s^a h(s)\, ds = \int_{t_0}^{0} s^a h(s)$ existe.

Or $\forall t \in I \; f(t) = t^{-a}\left(t_0^a \alpha + \int_{t_0}^{t} s^a h(s)\, ds \right)$

Or $\lim_{t\to 0^+} t^{-a} = +\infty$, donc pour que $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ existe

il est nécessaire que $\alpha = -t_0^{-a} \int_{t_0}^{0} s^a h(s)\, ds = t_0^{-a} \int_{0}^{t_0} s^a h(s)\, ds$

On a alors,

$$\forall t \in I \; f(t) = t^{-a} \int_0^t s^a h(s)\, ds$$

h est bornée sur $[0, \frac{\theta}{2}]$. $(\forall s \in [0,\frac{\theta}{2}] \; |h(s)| \leq K)$

On a alors

$$\forall t \in]0, \tfrac{\theta}{2}] \quad |f(t)| \leq t^{-a} \int_0^t s^a K\, ds = \frac{t^{-a} t^{a+1}}{a+1} K$$

$$\forall t \in]0, \tfrac{\theta}{2}] \quad |f(t)| \leq \frac{K}{a+1} t$$

et $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$