6.b)

1 Si $a \notin \mathbb{Z}^{*-}$ + Soit $a \geq 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $|k+a| \geq 1 = \delta > 0$

+ Soit $\exists p \in \mathbb{Z}^{*-}$ $p < a < p+1$ et

dans ce cas $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $k+a \geq \min(p+1-a, a-p) = \delta > 0$

Il existe donc $\delta > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $|k+a| > \delta$ et on peut supposer $\delta \leq 1$

2 Un tel δ ayant été fixé en 1 il suffit de prendre M_0 tel que $0 < M_0 \leq \dfrac{\delta}{2|c|\gamma}$

3 Un tel M existe puisque $Tu = v$ est dans E_+

4 Pour que cette condition soit vérifiée il suffit que $M_1 \geq \dfrac{M}{\delta M_0}$

5 On cherche M_1 tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $M_1 \geq \left(\dfrac{2k^2}{\delta M_0}\right)^{\frac{1}{k}} M$

Or $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{2k^2}{\delta M_0}\right)^{\frac{1}{k}} M$ existe donc la suite

$\alpha = (\alpha_k)_{k \geq 1} = \left(\left(\dfrac{2k^2}{\delta M_0}\right)^{\frac{1}{k}} M\right)_{k \geq 1}$ est bornée.

Pour avoir $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\delta M_0 M_1^k \geq 2k^2 M^k$ il suffit donc de choisir $M_1 \geq \sup\limits_{k \geq 1} \alpha_k$

Pour avoir 4 et 5 il suffit de choisir $M_1 \geq \max\left(\dfrac{M}{\delta M_0}, \sup\limits_{k \geq 1} \alpha_k\right)$

Il existe donc bien δ, M, M_0 et M_1 strictement positifs satisfaisant 1, 2, 3, 4 et 5.

6.c) Montrons par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_k| \leq \frac{M_0 M_1^k}{k^2}}$

- Pour $k = 1$ $\quad |u_1| = |v_1| \leq M = \delta M_0 M_1 \leq \frac{M_0 M_1^1}{1^2}$ (car on a supposé $\delta \leq 1$)

- On suppose le résultat vrai pour tout i, $1 \leq i \leq k-1$.

Alors $|u_k| \leq \frac{1}{|k+a|} \left(|v_k| + |c| \sum_{i=1}^{k-1} |u_i| |u_{k-i}| \right)$

$$\leq \frac{1}{|k+a|} \left(M^k + |c| \, M_0^2 M_1^k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2 (k-i)^2} \right)$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{\delta M_0 M_1^k}{2k^2} + \frac{2|c|\gamma M_0}{2k^2} M_0 M_1^k \right)$$

$$\leq \frac{\cancel{\delta}}{\delta} \left(\frac{\delta M_0 M_1^k}{2k^2} + \frac{\delta}{2k^2} M_0 M_1^k \right)$$

$\boxed{|u_k| \leq \frac{M_0 M_1^k}{k^2}}$

le résultat est vrai à l'ordre k.

q.e.d

6.d) Il existe $M_1 > 0$ tel que $\left((u_k) \times \left(\frac{1}{M_1}\right)^k \right)_{k \geq 1}$ soit bornée.

donc $r(u) \geq \frac{1}{M_1} > 0$ et $u \in E_+$

$\forall v \in E_+ \quad \exists u \in E_+ \quad v = Tu$.

Donc $T(E_+) \supset E_+$, et d'après 6.a) $T(E_+) \subset E_+$.

Finalement $T(E_+) = E_+$ et T est bijective, donc

$\boxed{T \text{ est une bijection de } E_+ \text{ sur } E_+}$

7a) Exemple. $a = 0 \quad c = -1 \quad v = \lambda e_1 \quad \lambda \in \mathbb{R}^{*+}$

$u_1 = v_1 = \lambda = \alpha_1 \lambda$ avec $\alpha_1 = 1$.

$\forall k \geq 2 \quad v_k = 0$

$\forall k \geq 2 \qquad u_k = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i} \right)$

Si on suppose $u_i = \alpha_i \lambda^i$ pour $1 \leq i \leq k-1$

On obtient bien $u_k = \alpha_k \lambda^k$ avec

$$\boxed{\alpha_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \alpha_{k-i}}$$

Montrons par récurrence que $\forall k \quad 2^{1-k} \leq \alpha_k \leq 1$.

Cela est vrai pour $k = 1$.

On suppose le résultat vrai pour $1 \leq i \leq k-1$.

alors
$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} 2^{2-k} \leq \alpha_k \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} 1 \times 1 = \frac{k-1}{k} \leq 1$$

$$2^{1-k} \leq \frac{2(k-1)}{k} 2^{1-k} \leq \alpha_k \leq 1$$ car $2(k-1) \geq k$ si $k \geq 2$

7b)
$$2\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^k \leq u_k r^k \leq (\lambda r)^k$$

Si $r < \frac{1}{\lambda}$ $(u_k r^k)_{k \geq 1}$ est bornée donc $r(v) \geq \frac{1}{\lambda}$

Si $r > \frac{2}{\lambda}$ $(u_k r^k)_{k \geq 1}$ n'est pas bornée donc $r(v) \leq \frac{2}{\lambda}$

En conclusion
$$\boxed{\frac{1}{\lambda} \leq r(u) \leq \frac{2}{\lambda}}$$

Quatrième partie

8) Sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$ les solutions de $Df=0$ sont les fonctions $f : t \mapsto C \exp\left(-a\int \frac{dt}{t}\right)$, c'est-à-dire

$$f : t \mapsto C e^{-a \ln|t|} \qquad C \text{ parcourant } \mathbb{C}$$

9) Une telle fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I (où $I =]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$) avec

$$f^{(n)}(t) = C(-a)(-a-1) \quad (-a-n+1) e^{-(a+n)\ln t}$$

sur $]0,+\infty[$, si $n \geq 1$.

$$f^{n}(t) = (-1)^n C(-a)(-a-1) \quad (-a-n+1) e^{-(a+n)\ln(-t)}$$

sur $]0,+\infty[$, si $n \geq 1$

Si f est non nulle $C \neq 0$ (et réciproquement !)

<u>si a n'est pas un entier négatif</u>, alors pour tout n $(-a)(-a-1) \quad (-a-n+1)$ est non nul et il existe un entier n tel que $a+n > 0$.

Pour ce n $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ (0^+ \text{ ou } 0^-)}} f^{(n)}(t) = +\infty$, donc f ne peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, encore moins en une solution $\mathcal{C}^\infty$ de $Df=0$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Si a est un entier négatif.</u> Alors les fonctions $t \mapsto C_+ t^{-a}$ et $t \mapsto C_-(-t)^{-a}$ ne peuvent être recollées en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ que d'une unique manière en prenant $C_+ = C_-(-1)^{(-a)}$ (condition de continuité de $f^{(-a)}$).

<u>Réciproquement</u> $t \mapsto Ct^{-a}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $Df=0$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ <u>la condition sur a est $a \in \mathbb{Z}^{-*}$</u>

10) $Df = g \iff \forall t \in I \quad t f'(t) + a f(t) = g(t)$

$\iff \forall t \in I \quad t^a f'(t) + a t^{a-1} f(t) = t^{a-1} g(t)$

$\iff \forall t \in I \quad (t^a f(t))' = t^{a-1} g(t)$

$\iff \forall t \in I \quad t^a f(t) - t_0^a f(t_0) = \int_{t_0}^{t} s^{a-1} g(s)\,ds$

(Théorème fondamental de l'analyse car $t \to t^{a-1} g(t)$ est continue sur I et $t \to t^a f(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I)

$$\boxed{Df = g \iff f(t) = t^{-a} t_0^a \underbrace{f(t_0)}_{=\alpha} + t^{-a} \int_{t_0}^{t} s^{a-1} g(s)\,ds}$$

11) La série entière $\sum_{k \geq 1} v_k t^k$ possède un rayon de convergence au moins égal à θ. Pour tout $(t_0, t) \in I^2$ elle converge donc uniformément sur le segment $J = [\min(t_0, t), \max(t_0, t)]$. Puisque la fonction $s \mapsto s^{a-1}$ est bornée sur J, on conserve la convergence uniforme sur le segment J.

On peut donc permuter intégration et sommation et

$$f(t) = \alpha t_0^a t^{-a} + t^{-a} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+a} t^{k+a} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+a} t_0^{k+a} \right)$$

(La division par $k+a$ pour prendre la primitive est possible car a n'est pas un entier négatif).

$$f(t) = \left(\alpha - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+a} \right) t_0^a t^{-a} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+a} t^k}_{\text{somme d'une série entière de rayon de convergence au moins } \theta}$$

la fonction $t \mapsto t^{-a}$ ne pouvant pas être prolongée sur $[0, \theta[$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (Voir question 3)), la seule possibilité pour que f soit sur $]0, \theta[$ la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins θ est $\boxed{\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k+a}}$