7. le noyau de Fekete

VII. 1) Le pavé $P = \{\lambda_1 v_1 + \quad + \lambda_n v_n \mid (\lambda_1, \quad, \lambda_n) \in [-1,1]^n\}$ est l'image du compact $[-1,1]^n$ par $(\lambda_1, \quad, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ qui est continue. Il est donc compact et en particulier borné pour $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$.

Soit $M = \sup_{x \in P} \|x\|_\infty$

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \bigcup_{k \in [-N,N]^n} (k + P) \subset [-N-M, N+M]^n$$

Supposons que tous les $k+P$ soient distincts, en prenant le volume

$$(2N+1)^n \operatorname{Vol}(P) \leq (2N+2M)^n$$

$$\operatorname{Vol}(P) \leq \frac{(2N+2M)^n}{(2N+1)^n}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$

$$\operatorname{Vol}(P) \leq 1.$$

Par contraposée $\exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2 \quad (k+P) \cap (k'+P) \neq \emptyset \quad k \neq k'$

dès que $\operatorname{vol}(P) > 1$.

Soit $x_0 \in (k+P) \cap (k'+P)$ et $w = x_0 - k$ ~~et~~ $w' = x_0 - k'$

alors $w \in P \quad w' \in P$ et $w - w' = k - k' \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$

VII. 2) D'après les résultats de la partie VI, tous les x_i sont distincts, et puisque $m \geq 2$ x n'est pas dans $\mathbb{Q}$ donc tous les x_i sont distincts de 1.

M est donc une matrice de Vandermonde associée au n-uplet $(x_1, \quad, x_{n-1}, 1)$ de réels distincts

M est donc inversible et f est bijective.

Soit $(e_1, \quad , e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Considérons le pavé

$$P_r = \left\{ \lambda_1 \frac{1}{4} e_1 + \lambda_2 \frac{1}{4} e_2 + \dots + \frac{1}{4} \lambda_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n \frac{r}{2} e_n \,\middle|\, (\lambda_1, \quad , \lambda_n) \in [-1,1]^n \right\}$$

Puisque f^{-1} est linéaire $f^{-1}(P_r)$ est un pavé P'_r

$$P'_r = \left\{ \lambda_1 \frac{1}{4} f^{-1}(e_1) + \qquad + \lambda_{n-1} \frac{1}{4} f^{-1}(e_{n-1}) + \lambda_n \frac{r}{2} f^{-1}(e_n) \,\middle|\, \lambda \in [-1,1]^n \right\}$$

Son volume est

$$\mathrm{vol}(P') = 2^n \times \frac{1}{4^{n-1}} \times \frac{r}{2} \times \Big| \underbrace{\det(f^{-1}(e_1), \qquad , f^{-1}(e_n))}_{\neq 0} \Big|$$

Il existe donc r tel que $\mathrm{Vol}(P'_r) > 1$.

Il existe alors $w \in P'_r$ $w' \in P'_r$ tel que $h = w - w' \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$.

et $f(h) = f(w) - f(w') \in P_r - P_r \subset B(r)$

VII.3) $f(h) = Mh = {}^t(s(x_1), \qquad , s(x_{n-1}), \sum_{i=1}^{n} h_i)$.

Puisque $f(h) \in B(r)$ on a clairement $\forall i \; |s(x_i)| \leq \frac{1}{2}$

De plus $s \neq 0$ car $h \neq 0$ et $\deg s \leq n-1 < m = \deg P_X$.

donc $s(x_i) \neq 0$ pour tout i (Question VI.4).

VII.4) Soit k dans $\mathbb{N}^*$, soit L le polynome d'interpolation de Lagrange tel que

$$\forall i \quad L(x_i) = \frac{y_i}{(s(x_i))^k}$$

D'après la question 4.8) il existe M (indépendant de k)

et $\tilde{L}$ tel que $\tilde{L} \in \mathbb{Z}[X]$ et $\|\tilde{L} - L\|_I \leq M$.

On aura $\forall i \quad \left| \tilde{L}(x_i) - \frac{y_i}{(D(x_i))^k} \right| \leq M$

$\forall i \quad |(D^k . \tilde{L})(x_i) - y_i| \leq M \sup_i |D(x_i)|^k \leq \frac{M}{2^k}$

Il existe k_0 tel que $\frac{M}{2^{k_0}} < \varepsilon$ (si $\varepsilon > 0$ est donné)

Si $p = D^{k_0}\tilde{L}$ alors $p \in \mathbb{Z}[X]$ et $\forall i \quad |p(x_i) - y_i| < \varepsilon$

VII. 5) - Ecrivons $S = \{x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1-1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2-1}, \ldots, x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k-1}\}$

où $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,m_i}$ sont les conjugués de $x_{i,1}$ et $n_i \in \{2, \ldots, m_i\}$.

- Soit $q = \prod_{1 \leq i \leq k} P_{x_{i,1}}$ et $q_i = \frac{q}{P_{x_{i,1}}}$ $\quad q \in \mathbb{Z}[X]$, $q_i \in \mathbb{Z}[X]$

Alors $\forall i \neq j \quad q_i(x_{j,l}) = 0 \quad 1 \leq l \leq n_j - 1$

$q_i(x_{i,l}) \neq 0 \quad 1 \leq l \leq n_i - 1$

- D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon' > 0$, en choisissant $\varepsilon = \min_{1 \leq l \leq n_i - 1} \left(\frac{\varepsilon'}{|q_i(x_{i,l})|} \right)$, il existe un polynôme

p_i tel que $\forall l \in \{1, \ldots, n_i - 1\} \quad \left| p_i(x_{i,l}) - \frac{y_{i,l}}{q_i(x_{i,l})} \right| < \frac{\varepsilon'}{|q_i(x_{i,l})|}$
$\in \mathbb{Z}[X]$

soit $\forall l \in \{1, \ldots, n_i - 1\} \quad |(q_i p_i)(x_{i,l}) - y_{i,l}| < \varepsilon'$

(PS. On a aussi renuméroté les y_i en $y_{1,1}, \ldots, y_{k,n_k-1}$.)

le polynôme $p = \sum_{i=1}^{k} p_i q_i$ est dans $\mathbb{Z}[X]$ et

$\forall i \quad \forall l \in \{1, \ldots, n_i - 1\} \quad p(x_{i,l}) = p_i q_i(x_{i,l})$.

$\forall i \quad |p(x_i) - y_i| < \varepsilon'$

VII 6) Soit $r = \text{ppcm}\{p_x,\ x \in F(I)\}$.

$r \in \mathbb{Z}[X]$, est unitaire et divise q.

De plus $\forall x \in S \quad r(x) \neq 0$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \min\limits_{x \in S} \frac{\varepsilon}{|r(x)|} \times \frac{1}{2}$

D'après la question précédente

$\exists p_1 \in \mathbb{Z}[X] \quad \forall x \in S \quad \left|\frac{f(x)}{r(x)} - p_1(x)\right| < \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{r(x)} \frac{1}{2}$

Soit $p = p_1 r \in \mathbb{Z}[X]$

$\forall x \in S \quad |f(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

et $\forall x \in F(I) \quad p(x) = 0$

$\forall x \in Z(q) \quad |f(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Une construction similaire à celle utilisée en IV 10 nous permet d'obtenir g continue telle que $\|g - f\|_I < \frac{\varepsilon}{2}$

et $\forall x \in Z(q) \quad g(x) = p(x)$.

D'après IV.11 il existe $s \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$\|s - g\|_I < \frac{\varepsilon}{2}$

On en déduit $\|s - f\|_I < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists s \in \mathbb{Z}[X] \quad \|s - f\|_I < \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists s_n \in \mathbb{Z}[X] \quad \|s_n - f\|_I < \frac{1}{2^n}$

f est bien la limite uniforme d'une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$

VII. 7. Supposons $F(I) \neq J(I)$, alors il existe x dans S.

Une fonction f de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de éléments de $\mathbb{Z}[X]$ si et seulement si il existe une polynôme p de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall y \in J(I)$ $p(y) = f(y)$.

Ceci implique en particulier $\exists p \in \mathbb{Z}[X]$ $f(x) = p(x)$.

D'après la question précédente, cela implique que pour toute fonction continue qui s'annule sur $F(I)$ il existe p dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que $f(x) = p(x)$.

Or $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ il existe f continue nulle sur $F(I)$ et prenant la valeur λ en x (par exemple le polynôme d'interpolation de Lagrange).

Or $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable et $\{p(x), p \in \mathbb{Z}[X]\}$ est dénombrable. On obtient donc une contradiction.

et $F(I) = J(I)$.