5. Polynômes symétriques.

V. 1) Soit $\underline{i} \in \mathbb{N}^n$ et $\underline{j} \in \mathbb{N}^n$ $\underline{i} \neq \underline{j}$.

Si $\sum_k i_k \neq \sum_k j_k$ alors soit $\sum i_k > \sum j_k$ et $\underline{i} > \underline{j}$

soit $\sum i_k < \sum j_k$ et $\underline{j} > \underline{i}$

Si $\sum_k i_k = \sum j_k$ puisque ~~que~~ $\underline{i} \neq \underline{j}$ $k_0 = \min \{k, i_k \neq j_k\}$ existe.

Si $i_{k_0} > j_{k_0}$ alors $\underline{i} > \underline{j}$

$i_{k_0} < j_{k_0}$ alors $\underline{j} > \underline{i}$.

Toutes les possibilités ayant été étudiées on en déduit

$$\forall (\underline{i}, \underline{j}) \in \mathbb{N}^n \quad \underline{i} = \underline{j} \text{ ou } \underline{i} < \underline{j} \text{ ou } \underline{i} > \underline{j}.$$

V. 2) Si $\underline{j} < \underline{i}$ alors $\sum_k j_k \leq \sum_k i_k = N$

Donc $\forall k$ $j_k \leq N$ et $\text{card}\{\underline{j}, \underline{j} < \underline{i}\} \leq (N+1)^n$.

Rq: On peut faire beaucoup mieux comme majoration.

V. 3) Soit $p \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$

Supposons $i_k > i_j$ avec $k > j$ et soit τ

la transposition (k, j).

Alors $\deg(p^\tau) \geqslant (i_1, \ldots, i_{j-1}, i_k, i_{j+1}, \ldots, i_{k-1}, i_j, i_{k+1}, \ldots, i_n)$

$> (i_1, \ldots, i_{j-1}, i_j, i_{j+1}, \ldots, i_n)$

$$\deg(p^\tau) > \deg(p)$$

Or $p^\tau = p$, il y a contradiction.

Donc $i_1 \geqslant i_2 \ldots \geqslant i_n$.

V.4) On démontre comme dans le cas des polynômes à une indéterminée que si P et Q sont deux polynômes non nuls alors $\deg PQ = \deg P + \deg Q$. (avec $\underline{i} + \underline{j} = (i_1+j_1, i_2+j_2, \ldots, i_n+j_n)$)

C'est clair pour les monômes, dans le cas général il suffit de développer le produit par bilinéarité et de remarquer que:

$(\underline{i}' \leq \underline{i}$ et $\underline{j}' \leq \underline{j}) \Rightarrow \underline{i}'+\underline{j}' \leq \underline{i}+\underline{j}$, l'inégalité étant stricte si l'une des deux premières l'est.

On en déduit

$$\deg S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n} = d_1 \deg S_1 + d_2 \deg S_2 + \cdots + d_n \deg S_n$$

$$= (i_1 - i_2)(1,0,\ldots,0) + (i_2 - i_3)(1,1,0,\ldots,0) + \cdots + d_n(1,\ldots,1)$$

$$= (i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

$$\deg S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n} = \underline{i}$$

Or

$$P = \mathrm{dom}(P) X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} + \sum_{\underline{j} < \underline{i}} a_{\underline{j}} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}$$

$$S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n} = X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} + \sum_{\underline{j} < \underline{i}} b_{\underline{j}} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}$$

Par conséquent

$$P - \mathrm{dom}(P) S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n} = \sum_{\underline{j} < \underline{i}} (a_{\underline{j}} - b_{\underline{j}}) X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}$$

et

$$P = \mathrm{dom}(P) S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n} \quad \text{ou}$$

$$Q = P - \mathrm{dom}(P) S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n} \neq 0 \quad \text{et} \quad \deg(Q) < \deg(P)$$

V.5) Le résultat s'établit par récurrence, puisque si P est symétrique Q l'est aussi et que d'après V.2) il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'indices $\underline{i}$. (Si le résultat est faux, introduire le polynôme de degré minimal et aboutir à une contradiction)