

Partie I - Polynômes de Hilbert

I.A.1) $(1+X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$.

Or on a donc $M_n = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ avec $m_{i,j} = \binom{n}{j}$ si $i \leq j$
 $m_{i,j} = 0$ si $i > j$.

(On pourrait aussi avoir $\Pi_n = (\tilde{m}_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ avec

$$m_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} \text{ si } i \leq j \quad m_{i,j} = 0 \text{ si } i > j$$

I.A.2) Soit $T_1 : P \mapsto P(X-1)$, clairement $T_1 \circ T = T \circ T_1 = \text{Id}_{\mathbb{C}_n[X]}$
 donc T est inversible et $T_1 = T^{-1}$.

Il en résulte que Π_n est inversible et puisque

$$(X-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$$

$$M_n^{-1} = (m'_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \text{ avec } m'_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{j-i}{i} \text{ si } i \leq j$$

$$m'_{i,j} = 0 \text{ si } i > j$$

I.B.1) $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une famille de $n+1$ polynômes de degré échelonnés. Elle est donc libre. Sa longueur est
 $n+1 = \dim \mathbb{C}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$

I.B.2) Si $j < 0$ $H_i(j) = \frac{j(j-1) \dots (j-i+1)}{i!} = (-1)^i \frac{|j|(|j|+1) \dots (|j|+i-1)}{i!}$

Si $j < 0$ $H_i(j) = \binom{|j|+i-1}{i} (-1)^i \in \mathbb{Z}$, $H_0(j) = 1$

Si $0 \leq j \leq i-1$ $H_i(j) = 0 \in \mathbb{Z}$

Si $j \geq i$ $H_i(j) = \binom{j}{i} \in \mathbb{Z}$

I.C.1) $\forall i \quad P(i) = \sum_{j=0}^n a_j H_j(i)$

$\forall i \quad P(i) = \sum_{j=0}^i a_j \binom{i}{j} = \sum_{j=0}^n m_{j,i} a_j$

matriciellement $\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t M_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

I.C.2) On a vu que M_n était inversible, donc ${}^t M_n$ l'est aussi et $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = ({}^t M_n)^{-1} \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t (M_n^{-1}) \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$

et par conséquent pour $0 \leq i \leq n$

$a_i = \sum_{j=0}^n m'_{j,i} P(j) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j)$

(A noter: l'énoncé utilise la notation française : $C_n^r = \binom{n}{r}$ C comme combinaison)

Soit $n' \geq i \geq n+1$ et P dans $\mathbb{C}_n[x] \subset \mathbb{C}_{n'}[x]$

D'après le résultat précédent $\sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j)$ est

égal à a_i avec $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$.

Or on sait que cette décomposition est unique et que d'autre part, puisque $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[x]$

on peut écrire $P = \sum_{k=0}^n a'_k H_k$.

Par unicité $\forall k \quad 0 \leq k \leq n \quad a'_k = a_k$
 $\forall k \geq n+1 \quad a'_k = 0$

$\forall i \geq n+1 \quad \forall P \in \mathbb{C}_n[x] \quad \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j) = 0$

I.C.3) Il résulte de I.C.2) que a) $\Rightarrow$ b)

(3)

D'après I.B.2) $\forall j \in \mathbb{N} \forall i \in \mathbb{N} \quad \underline{H_i(j) \in \mathbb{Z}}$. Puisque $\mathbb{Z}$ est un anneau b) $\Rightarrow$ c).

c) $\Rightarrow$ a). est trivial car $\{0, \dots, n\} \subset \mathbb{Z}$

I.D) D'après I.C.2) a) $\Rightarrow$ b).

Réciproquement soit $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite complexe ~~finie~~ vérifiant b)

Soit P le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$, $P = \sum_{i=0}^n a_i H_i$ avec.

$$a_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u_j \quad 0 \leq i \leq n.$$

$$\text{on a } \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^t \Pi_n^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = {}^t \Pi_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$$

Or la donnée de b) et de $(u_0, \dots, u_n)$ définit une unique suite vérifiant b).

Posons $v = (P(j))_{0 \leq j \in \mathbb{N}}$ vérifie b) et $(v_0, \dots, v_n) = (u_0, \dots, u_n)$

$$\text{donc } \boxed{\forall j \in \mathbb{N} \quad u_j = v_j = P(j)}$$

Partie II. quelques propriétés des séries entières

(4)

II. A.1) Soit z avec $|w| < r < R$.

$$\forall t \in [-\pi, \pi] \quad f(re^{it})e^{-ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_n z^n}_{g_n(t)} e^{i(n-p)t}$$

* Chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$

$$\sim \forall t \in [-\pi, \pi] \quad |g_n(t)| \leq |a_n| r^n$$

et $\sum |a_n| r^n$ converge

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ converge normalement donc uniformément
sur le segment $[-\pi, \pi]$

On peut donc permuter intégration et sommation

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t} dt$$

Or
Si $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=0 \\ \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = 2\pi a_p z^p$$

II. A.2) $\forall t \in [-\pi, \pi]$

$$\frac{ze^{it}}{ze^{it}-w} f(re^{it}) = \frac{1}{1 - \frac{w}{z} e^{-it}} f(re^{it})$$

$$\frac{ze^{it}}{ze^{it}-w} f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{w}{z} \right)^n e^{-int} f(re^{it})}_{h_n(t)} \quad \text{car } \left| \frac{w}{z} \right| < 1$$

+ f est continue sur D_p , en particulier borne sur le compact C_2 (borne, borne). Donc il existe M tel que $\forall t \in [-\pi, \pi] \quad |f(re^{it})| \leq M$ (on a aussi d'autres, pour évaluer l'ensemble de compacité, caractériser

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} 10_n / 2^n$$

+ On en déduit $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [-\pi, \pi] \quad |f_p(t)| \leq \left(\frac{M}{2}\right)^p$
 or $\sum \left(\frac{M}{2}\right)^p$ converge (vers $\frac{1}{1 - \frac{M}{2}}$), car $\frac{M}{2} \in [0, 1[$

On retrouve l'ensemble de convergence normale dans une forme bien un segment, qui nous permet de permuter l'intégration

et commutation.

$$\text{On a déduit} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - w} f(re^{it}) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{r^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ipt} f(re^{it}) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_p w^n$$

$$f(w) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - w} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi}$$

(A noter: l'indication était pour l'opérateur, n'oubliez pas à lire plus loin que la question qui nous étonne en train de résoudre)

II.B.1) l'existence de $M_p(r)$ a été justifiée en haut de

cette page.

II.B.2) on applique l'inégalité triangulaire

$$|f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{r - |w|} M_p(r) dt$$

$$|f(w)| \leq \frac{r}{r - |w|} M_p(r)$$

II.B.2) Grâce au théorème sur le produit de Cauchy, (6)
 on peut affirmer que le produit de la somme de deux séries
 entières de rayon de convergence R peut s'écrire comme la
 somme d'une série entière de rayon de convergence au moins R .

On en déduit que f^p est égale à la somme d'une série entière
 de rayon de convergence au moins R , pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Donc } \forall p \in \mathbb{N}^* \quad |f(w)|^p \leq \frac{R}{R-|w|} M_{f^p}(R) = \frac{R}{R-|w|} (M_f(R))^p.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad |f(w)| \leq \left(\frac{R}{R-|w|} \right)^{\frac{1}{p}} M_f(R)$$

Puis, en faisant tendre p vers $+\infty$

$$|f(w)| \leq M_f(R)$$

II.C.1) Si w il est clair que $\sum_{n \geq j+1} a_n w^{n-1-j}$ converge.

Si $w \neq 0$ $\sum_{n \geq j+1} a_n w^n$ converge (reste d'une série
 convergente) donc $\sum_{n \geq j+1} a_n w^{n-1-j}$ converge, cette
 série converge d'ailleurs absolument.

III.C.2) On a $0 < r \leq R$ donc $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ est bornée.

$$\exists M \quad \forall n \quad |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{Il en résulte}$$

$$\forall j \quad |b_j| \leq \sum_{n=j+1}^{+\infty} |a_n| |w|^{n-1-j} \leq \sum_{n=j+1}^{+\infty} M \frac{1}{r^n} |w|^{n-1-j} = \frac{M}{r^{j+2} \left(1 - \frac{|w|}{r}\right)}$$

(série géométrique de raison $\frac{|w|}{r}$)

$$\exists M_1 \quad \forall j \quad |b_j| \leq \frac{M_1}{r^j} \quad \text{donc } |b_j| = O\left(\frac{1}{r^j}\right)$$

II.C.3) Il résulte de la question précédente que pour tout (7)
 $\forall \omega \in \mathbb{C}, \omega < R$, la suite $(b_j \omega^j)_{j \geq 0}$ est bornée.
 le rayon de convergence de $\sum_{j \geq 0} b_j z^j$ est donc au moins égal
 à R .

$$\begin{aligned} \forall z \in D_R \quad (z-\omega) g(z) &= \sum_{j=0}^{+\infty} (b_j z^{j+1} - \omega b_j z^j) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^{j+1} - \sum_{j=0}^{+\infty} \omega b_j z^j \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} b_{j-1} z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} \omega b_j z^j \\ &= -\omega b_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} (b_{j-1} - \omega b_j) z^j \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \omega^n + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j z^j \\ (z-\omega) g(z) &= \sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \omega^j \end{aligned}$$

$$\forall z \in D_R \quad (z-\omega) g(z) = f(z) - f(\omega)$$

II.D.1) D'après la question précédente il existe une fonction

G dans E_R telle que

$$\forall z \in D_R \quad f(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j) G(z).$$

(En effet si z_k est un zéro de f dans D_R alors

$$f(z) = f(z) - f(z_k) = (z - z_k) g(z), \quad g \in E_R \text{ et}$$

puisque $z_i \neq z_k$ si $k \neq i$ $f(z_i) = 0 \Rightarrow g(z_i) = 0$. on

démontre alors par récurrence $f(z) = (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_k) g_k(z)$ $g_k \in E_R$

O2 $\forall j \quad z \mapsto z^2 - \bar{z}_0 z \in E_P$ et on a déjà remarqué (8)

que E_P est stable par multiplication.

$$\forall z \in E_P \quad f(z) \times \prod_{j=1}^n (z^2 - \bar{z}_0 z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i) \underbrace{G(z) \prod_{j=1}^n (z^2 - \bar{z}_0 z)}_{F(z)}, F \in E_P$$

II.D.2) $z \in C_r \setminus \{z_0\} \quad \left| \frac{z^2 - \bar{z}_0 z}{z - z_0} \right|^2 = \frac{z^2 - \bar{z}_0 z}{z - z_0} \cdot \frac{z^2 - z_0 \bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_0} = A$

$$A = \frac{z^4 - z^2(\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) + |z_0|^2 |z|^2}{|z|^2 - (\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) + |z_0|^2} = z^2 \quad \text{car } |z|^2 = z^2$$

Donc $\forall z \in C_r \setminus \{z_0\} \quad \left| \frac{z^2 - \bar{z}_0 z}{z - z_0} \right| = r.$

II.D.3) $\forall z \in C_r \setminus \{z_0\} \quad 1 \leq j \leq p \quad |F(z)| = r^{2p} |f(z)|$ d'après II.D.2

Ce résultat s'étend à C_r par continuité de F et f .

Donc $M_F(r) = r^{2p} M_f(r).$

O2 $|f(0)| r^{2p} = \left| \prod_{j=1}^p z_0 \right| |F(0)| \leq \left| \prod_{j=1}^p z_0 \right| M_F(r)$

$$|f(0)| r^{2p} \leq r^{2p} \left| \prod_{j=1}^p z_0 \right| M_f(r)$$

$$|f(0)| r^p \leq \left| \prod_{j=1}^p z_0 \right| M_f(r)$$

⑨

II D.4) On peut écrire $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z^3 g(z)$

avec $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3} z^n$, $g \in \mathbb{C}^*$.

$$g(0) = a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \quad , \quad \forall g \quad g(z_0) = 0 \quad (\text{car } f(z_0) = 0 \text{ et } z_0 \neq 0)$$

De plus $M_g(z) = \frac{M_f(z)}{z^3}$

le résidu de la fonction précédente donne

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k = |g(0)| z^3 \leq \left| \prod_{j=1}^n g_j(z) \right| M_g(z) = \left| \prod_{j=1}^n g_j(z) \right| \frac{M_f(z)}{z^3}$$

Sont $\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k \leq \left| \prod_{j=1}^n g_j(z) \right| M_f(z)$

II.E) Supposons $f \neq 0$, donc $b = \min \{y, a \neq 0\}$ est définie. $\forall r \in \mathbb{N}$ f s'annule sur $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_n$. D'après la

question précédente on a donc, en prenant $r = r$

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k \leq M_f(z) \prod_{j=1}^n z^{r_j}$$

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k \leq M_f(z) z^r$$

Or $\exists M \quad \forall r \quad M_f(z) \leq M e^r$ avec $c \in]0, e[$

$$\forall r \quad 0 < \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k \leq M e^r \sim M \left(\frac{e}{z} \right)^r \sim \frac{M}{z^{r-\frac{1}{2}}} \leq 0$$

Or $\frac{e}{z} \in \mathbb{C}^*$, donc $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M}{z^{r-\frac{1}{2}}} = 0$, et $0 < \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k \leq 0$

Contradiction

III.A.1) F_n est une fraction rationnelle à pôles simples et degré négatif, elle se décompose donc sous la forme

$$F(x) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{x-i} \quad \text{avec} \quad a_i = F(x)(x-i) \Big|_{x=i}$$

$$a_i = \frac{n!}{i(i-1)\dots 1 \times -1 \times -2 \times \dots \times (i-i)} = \frac{n! (-1)^{n-i}}{i! (n-i)!}$$

$$F(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{1}{x-i}$$

III.A.2) $A_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it}-1)(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! re^{it} f(re^{it})}{re^{it}(re^{it}-1)(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi}$

$$A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it} f(re^{it})}{(re^{it}-k)} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

(d'après II.A.2)
(car $r > |k|$)

III.A.3) Il en résulte, à l'aide de l'inégalité triangulaire.

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! |f(re^{it})|}{|re^{it}-1| \cdot |re^{it}-n|} \frac{dt}{2\pi}$$

Or $\forall x \in [-\pi, \pi] \quad |f(re^{it})| \leq M_f(r) \quad \text{et} \quad \forall k \in [1, n] \quad |re^{it}-1| \geq |re^{it}-k| \geq r-k$

Puis

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \leq \frac{n! M_f(r)}{(r-1)(r-n)}$$

III. B. 1) On choisit $n = 2n+1$.

(11)

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \leq \frac{n!}{(2n)!} M_f(2n+1) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \Pi_f(2n+1)$$

On utilise la formule de Stirling, on en déduit

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2}{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{2^{2n}} \quad , \quad \text{Or } \Pi_f(2n) = O\left(\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}\right)$$
$$\Pi_f(2n+1) = O\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\right)$$

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) = 0$

Or $\forall k \in \mathbb{N} \quad f(k) \in \mathbb{Z}$, donc $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \in \mathbb{Z}$

Par conséquent $\exists N \quad \forall n \geq N \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) = 0$

III. B. 2) D'après I. D) il existe donc un polynôme

P tel que $\forall k \in \mathbb{N} \quad f(k) = P(k)$

- Or $f \in E_\infty \quad P \in E_\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N} \quad (f-P)(k) = 0$

Donc d'après II. E) $f-P=0$

et $f = P$ est un polynôme