

Partie II. quelques propriétés des séries entières

(4)

II. A.1) Soit z avec $|w| < r < R$.

$$\forall t \in [-\pi, \pi] \quad f(re^{it})e^{-ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_n z^n}_{g_n(t)} e^{i(n-p)t}$$

* Chaque facteur g_n est continue sur $\mathbb{R}$

$$\sim \forall t \in [-\pi, \pi] \quad |g_n(t)| \leq |a_n| r^n$$

et $\sum |a_n| r^n$ converge

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ converge normalement donc uniformément
sur le segment $[-\pi, \pi]$

On peut donc permuter intégration et sommation

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t} dt$$

Or
Soit $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=0 \\ \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = 2\pi a_p z^p$$

II. A.2) $\forall t \in [-\pi, \pi]$

$$\frac{ze^{it}}{ze^{it}-w} f(re^{it}) = \frac{1}{1 - \frac{w}{z} e^{-it}} f(re^{it})$$

$$\frac{ze^{it}}{ze^{it}-w} f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{w}{z} \right)^n e^{-int} f(re^{it})}_{h_n(t)} \quad \text{car } \left| \frac{w}{z} \right| < 1$$

+ f est continue sur D_p , en particulier borne sur le compact C_2 (borne, borne). Donc il existe M tel que $\forall t \in [-\pi, \pi] \quad |f(re^{it})| \leq M$ (on trouve d'ailleurs, pour évaluer l'argument de compacité, chose que

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} 10^n / 2^n$$

+ On en déduit $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [-\pi, \pi] \quad |f_p(t)| \leq \left(\frac{M}{2}\right)^p$

et $\sum \left(\frac{M}{2}\right)^p$ converge (vers $\frac{1}{1 - \frac{M}{2}}$), car $\frac{M}{2} \in [0, 1[$

On retrouve l'unique point de convergence normale dans une forme bien un segment, qui nous permet de permuter l'intégration

et sommation.

On a déduit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - w} f(re^{it}) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{r^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ipt} f(re^{it}) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_p w^n$$

$$f(w) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - w} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi}$$

(A noter: l'indication était sur le log, sur la borne, n'oubliez pas à lire plus loin que la question qui nous étonne en train de résoudre)

II.B.1) l'existence de $M_p(r)$ a été justifiée en haut de

cette page.

II.B.2) on applique l'inégalité triangulaire

$$|f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{r - |w|} M_p(r) dt$$

$$|f(w)| \leq \frac{r}{r - |w|} M_p(r)$$

II.B.2) Grâce au théorème sur le produit de Cauchy, (6)
 on peut affirmer que le produit de la somme de deux séries
 entières de rayon de convergence R peut s'écrire comme la
 somme d'une série entière de rayon de convergence au moins R .

On en déduit que f^p est égale à la somme d'une série entière
 de rayon de convergence au moins R , pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Donc } \forall p \in \mathbb{N}^* \quad |f(w)|^p \leq \frac{R}{R-|w|} M_{f^p}(R) = \frac{R}{R-|w|} (M_f(R))^p.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad |f(w)| \leq \left(\frac{R}{R-|w|} \right)^{\frac{1}{p}} M_f(R)$$

Puis, en faisant tendre p vers $+\infty$

$$|f(w)| \leq M_f(R)$$

II.C.1) Si w il est clair que $\sum_{n \geq j+1} a_n w^{n-1-j}$ converge.

Si $w \neq 0$ $\sum_{n \geq j+1} a_n w^n$ converge (reste d'une série
 convergente) donc $\sum_{n \geq j+1} a_n w^{n-1-j}$ converge, cette
 série converge d'ailleurs absolument.

III.C.2) On a $0 < r \leq R$ donc $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ est bornée.

$$\exists M \quad \forall n \quad |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{Il en résulte}$$

$$\forall j \quad |b_j| \leq \sum_{n=j+1}^{+\infty} |a_n| |w|^{n-1-j} \leq \sum_{n=j+1}^{+\infty} M \frac{1}{r^n} |w|^{n-1-j} = \frac{M}{r^{j+2} \left(1 - \frac{|w|}{r}\right)}$$

(série géométrique de raison $\frac{|w|}{r}$)

$$\exists M_1 \quad \forall j \quad |b_j| \leq \frac{M_1}{r^j} \quad \text{donc } |b_j| = O\left(\frac{1}{r^j}\right)$$

II.C.3) Il résulte de la question précédente que pour tout (7)
 $\forall R < R$, la suite $(b_j z^j)_{j \geq 0}$ est bornée.
 le rayon de convergence de $\sum_{j \geq 0} b_j z^j$ est donc au moins égal
 à R .

$$\begin{aligned} \forall z \in D_R \quad (z-\omega) g(z) &= \sum_{j=0}^{+\infty} (b_j z^{j+1} - \omega b_j z^j) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^{j+1} - \sum_{j=0}^{+\infty} \omega b_j z^j \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} b_{j-1} z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} \omega b_j z^j \\ &= -\omega b_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} (b_{j-1} - \omega b_j) z^j \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \omega^n + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j z^j \\ (z-\omega) g(z) &= \sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \omega^j \end{aligned}$$

$$\forall z \in D_R \quad (z-\omega) g(z) = f(z) - f(\omega)$$

II.D.1) D'après la question précédente il existe une fonction

G dans E_P telle que

$$\forall z \in D_P \quad f(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j) G(z).$$

(En effet si z_k est un zéro de f dans D_P alors

$$f(z) = f(z) - f(z_k) = (z - z_k) g(z), \quad g \in E_P \text{ et}$$

puisque $z_i \neq z_k$ si $k \neq i$ $f(z_i) = 0 \Rightarrow g(z_i) = 0$. on

démontre alors par récurrence $f(z) = (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_k) g_k(z)$ $g_k \in E_P$

O2 $\forall j \quad z \mapsto z^2 - \bar{z}_0 z \in E_P$ et on a déjà remarqué (8)

que E_P est stable par multiplication.

$$\forall z \in E_P \quad f(z) \times \prod_{j=1}^n (z^2 - \bar{z}_0 z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i) \underbrace{G(z) \prod_{j=1}^n (z^2 - \bar{z}_0 z)}_{F(z)}, F \in E_P$$

II.D.2) $z \in C_r \setminus \{z_0\} \quad \left| \frac{z^2 - \bar{z}_0 z}{z - z_0} \right|^2 = \frac{z^2 - \bar{z}_0 z}{z - z_0} \cdot \frac{z^2 - z_0 \bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_0} = A$

$$A = \frac{z^4 - z^2(\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) + |z_0|^2 |z|^2}{|z|^2 - (\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) + |z_0|^2} = z^2 \quad \text{car } |z|^2 = r^2$$

Donc $\forall z \in C_r \setminus \{z_0\} \quad \left| \frac{z^2 - \bar{z}_0 z}{z - z_0} \right| = r.$

II.D.3) $\forall z \in C_r \setminus \{z_0\} \quad 1 \leq j \leq p \quad |F(z)| = r^{2p} |f(z)|$ d'après II.D.2

Ce résultat s'étend à C_r par continuité de F et f .

Donc $M_F(r) = r^{2p} M_f(r).$

O2 $|f(0)| r^{2p} = \left| \prod_{j=1}^p z_0 \right| |F(0)| \leq \left| \prod_{j=1}^p z_0 \right| M_F(r)$

$$|f(0)| r^{2p} \leq r^{2p} \left| \prod_{j=1}^p z_0 \right| M_f(r)$$

$$|f(0)| r^p \leq \left| \prod_{j=1}^p z_0 \right| M_f(r)$$

⑨

II D.4) On peut écrire $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} g(z)$

avec $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^n$, $g \in E_R$.

$$g(0) = a_0 = \frac{f'(0)}{k!}, \quad \forall g, \quad g(3_0) = 0 \quad (\text{car } f(3_0) = 0 \text{ et } 3_0 \neq 0)$$

$$\text{De plus } M_g(z) = \frac{M_f(z)}{z^k}$$

le résidu de la fonction précédente donne

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k = |g(0)| z^k \leq \left| \prod_{j=1}^k s_j \right| M_g(z) = \left| \prod_{j=1}^k 3_j \right| \frac{M_f(z)}{z^k}$$

$$\text{Soit } \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k \leq \left| \prod_{j=1}^k 3_j \right| M_f(z)$$

II.E) Supposons $f \neq 0$, donc $k = \min \{j, a_j \neq 0\}$ est défini.
 $\forall r \in \mathbb{N}$ $f^{(r)}$ annule sur $\{z_1, \dots, z_p\}$. D'après la

question précédente on a donc, en prenant $r = k$

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k \leq M_{f^{(k)}} \prod_{j=1}^k s_j$$

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k \leq M_f(z) z^k$$

Or $\exists M \quad \forall r \quad M_f(r) \leq M e^r$ avec $c \in]0, e[$

$$\forall p \quad 0 < \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k \leq M e^r \sim M \left(\frac{e}{z} \right)^r \frac{1}{r^{k-\frac{1}{2}}} \leq 0$$

Or $\frac{e}{z} \in \mathbb{R}$, donc $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^{k-\frac{1}{2}}} = 0$, et $0 < \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| z^k \leq 0$

Contradiction