Centrale-Supélec 2003 Mathématiques I PSI

Partie I - Polynômes de Hilbert

I.A.1) $(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$.

On a donc $\boxed{M_n = (m_{i,j})_{0\le i,j\le n}}$ avec $m_{i,j} = \binom{j}{i}$ si $i \le j$, $m_{i,j} = 0$ si $i > j$.

(On pourrait aussi avoir $M_n = (\tilde{m}_{i,j})_{1\le i,j\le n+1}$ avec $m_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ si $i\le j$, $m_{i,j} = 0$ si $i>j$)

I.A.2) Soit $T_1 : P \mapsto P(X-1)$, clairement $T_1 \circ T = T\circ T_1 = Id_{\mathbb{C}_n[X]}$

donc T est inversible et $T_1 = T^{-1}$.

Il en résulte que M_n est inversible et puisque
$$(X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$$

$\boxed{M_n^{-1} = (m'_{i,j})_{0\le i,j\le n}}$ avec $m'_{i,j} = (-1)^{j-i}\binom{j}{i}$ si $i\le j$, $m'_{i,j} = 0$ si $i>j$

I.B.1) $(H_i)_{0\le i\le n}$ est une famille de $n+1$ polynômes de degré échelonnés. Elle est donc libre. Sa longueur est $n+1 = \dim \mathbb{C}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$

I.B.2) Si $y<0$ $H_i(y) = \dfrac{y(y-1)\ \ (y-i+1)}{i!} = (-1)^i \dfrac{|y|(|y|+1)\ \ (|y|+i-1)}{i!}$

$\boxed{\text{Si } y<0 \quad H_i(y) = \binom{|y|+i-1}{i}(-1)^i \in \mathbb{Z}, \quad H_0(y) = 1}$

$\boxed{\text{Si } 0\le y\le i-1 \quad H_i(y) = 0 \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{\text{Si } y\ge i \quad H_i(y) = \binom{y}{i} \in \mathbb{Z}}$

I.C.1) $\forall i \quad P(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j H_j(i)$

$$\forall i \quad P(i) = \sum_{j=0}^{i} a_j \binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{n} m_{j,i}\, a_j$$

Matriciellement $\begin{pmatrix} P(0) \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t M_n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_n \end{pmatrix}$.

I.C.2) On a vu que M_n était inversible, donc ${}^t M_n$ l'est aussi et $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_n \end{pmatrix} = ({}^t M_n)^{-1} \begin{pmatrix} P(0) \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t (M_n^{-1}) \begin{pmatrix} P(0) \\ P(n) \end{pmatrix}$.

et par conséquent pour $0 \leq i \leq n$

$$a_i = \sum_{j=0}^{n} m'_{j,i} P(j) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j)$$

(A noter : l'énoncé utilise la notation française : $C_n^p = \binom{n}{p}$ C comme combinaison)

Soit $n' \geq i \geq n+1$. et P dans $\mathbb{C}_n[X] \subset \mathbb{C}_{n'}[X]$

D'après le résultat précédent $\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j)$ est égal à a_i avec $P = \sum_{k=0}^{n'} a_k H_k$.

Or on sait que cette décomposition est unique et que d'autre part, puisque $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a'_k H_k$.

Par unicité. $\forall k \quad 0 \leq k \leq n \quad a'_k = a_k$

$\forall k \geq n+1 \quad a_k = 0$.

$$\forall i \geq n+1 \quad \forall P \in \mathbb{C}_n[X] \quad \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j) = 0$$

I.C.3) Il résulte de I.C.2) que a) ⇒ b)

D'après I.B.2) $\forall y \in \mathbb{Z}\ \forall i \in \mathbb{N}\ H_i(y) \in \mathbb{Z}$. Puisque $\mathbb{Z}$ est un anneau b) ⇒ c).

c) ⇒ a) est trivial car $\{0,\dots,n\} \subset \mathbb{Z}$

I.D) D'après I.C.2) a) ⇒ b).

Réciproquement soit $(u_y)_{y\in\mathbb{N}}$ une suite complexe ~~[illegible]~~ vérifiant b)

Soit P le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$ avec

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u_j \qquad 0 \leq i \leq n.$$

on a
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \\ a_n \end{pmatrix} = {}^t M_n^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ \\ u_n \end{pmatrix} = {}^t M_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) \\ \\ P(n) \end{pmatrix}$$

Or la donnée de b) et de $(u_0, \ \ , u_n)$ définit une unique suite vérifiant b).

Mais $v = (P(y))_{y\in\mathbb{N}}$ vérifie b) et $(v_0, \ ,v_n) = (u_0, \ ,u_n)$

donc $\boxed{\forall y \in \mathbb{N} \quad u_y = v_y = P(y)}$