Un corrigé du concours Mines Math-II- 2015 Filière MP

Proposé par Mr : HAMANI Ahmed

Dans toute la suite $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel noté $(.|.)$, sa norme associée est donc $\|.\|$.

A. Norme d'opérateur d'une matrice

1) • - S^{n-1} est bornée par définition.

- L'application $\|.\|$ est continue comme application 1−lipschitzienne et $\{1\}$ est fermé comme singleton, donc S^{n-1} est un fermé comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $\|.\|$.

- On conclut que S^{n-1} est fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie, donc S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$.

• Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, L'application $x \longmapsto \|Mx\|$ est continue comme composée l'application $x \longmapsto Mx$ qui est continue par linéarité et $\dim(\mathbb{R}^n) < +\infty$ et de l'application continue $\|.\|$, donc elle est bornée et atteint sa borne supérieure sur le compact S^{n-1}, ce qui assure l'existence de $\|M\|_{op}$.

2) • - Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M\|_{op} = 0$, alors $\forall x \in S^{n-1}$, $\|Mx\| = 0$, donc $\forall x \in S^{n-1}$, $Mx = 0$, en particulier $\forall i \in [[1, n]]$, $Me_i = 0$ où $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ce qui entraine que $M = 0$.

• - Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- $\forall x \in S^{n-1}, \|\lambda Mx\| = |\lambda|\|Mx\| \leq |\lambda|\|M\|_{op}$, ce qui donne en passant au sup que $\|\lambda M\|_{op} \leq |\lambda|\|M\|_{op}$.

- On applique cette inégalité pour λM, on aura $\|M\|_{op} = \|\frac{1}{\lambda}\lambda M\|_{op} \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda M\|_{op}$, donc $|\lambda|\|M\|_{op} \leq \|\lambda M\|_{op}$, ce qui donne l'égalité $\|\lambda M\|_{op} = |\lambda|\|M\|_{op}$ égalité encore vraie pour $\lambda = 0$.

• - Soit $M, N \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in S^{n-1}$, $\|(M+N)x\| = \|Mx+Nx\| \leq \|Mx\|+\|Nx\| \leq \|M\|_{op}+\|N\|_{op}$ et par passage au max, on obtient $\|M + N\|_{op} \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}$.

• - Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors $\frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$, donc $\left\|M.\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \|M\|_{op}$, donc $\|Mx\| \leq \|M\|_{op}\|x\|$, inégalité encore vraie pour $x = 0$, donc $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|Mx - My\| = \|M(x - y)\| \leq \|M\|_{op}\|x - y\|$.

3) La matrice M étant symétrique réelle, donc d'après le théorème spéctral, M est diagonalisable dans une base orthonormée pour le produit scalaire usuel, de vecteurs propres de M.
Notons $\sigma(M) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ la base orthonormale de vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tel que $|\lambda_1| \leq ... \leq |\lambda_n|$.
$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i \in S^{n-1}$, on a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ et $Mx = \sum_{i=1}^{n} x_i M\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i$, donc

$$\|Mx\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leq \lambda_n^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n^2$$

et par passage au max, on obtient $\|M\|_{op} \leq |\lambda_n| = \max(|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|)$.

4) Un calcul simple donne $J_n^2 = nJ_n$, donc $X(X - n)$ est le polynôme minimal de J_n, donc $\sigma(J_n) = \{0, n\}$.
De plus $\text{ran}(J_n) = 1$, donc $\dim(E_0(J_n)) = \dim(\text{Ker}(J_n)) = n - 1$ et $\dim(E_n(J_n)) = 1$.
$J_n u = u$ où on a noté $u = {}^t(1, ..., 1)$, donc $E_n(J_n) = \text{Vect}(u)$ et $E_0(J_n) = (\text{Vect}(u))^{\perp}$.
On a donc $\|J_n\|_{op} = \max(0, n) = n$.

5) $\forall i, j \in [[1, n]]$, $M_{i,j} = (Me_j|e_i)$, donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$|M_{i,j}| \leq \|Me_j\|\|e_i\| \leq \|M\|_{op}$, et le passage au max entraine que $\max\limits_{1\leq i,j\leq n}\{|M_{i,j}|\} \leq \|M\|_{op}$.

6) Soit $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in S^{n-1}$ et notons $(Mx)_1, \dots, (Mx)_n$ les composantes du vecteur Mx, alors

$$\|Mx\|^2=\sum_{i=1}^{n}(Mx)_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right)^2$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} M_{i,j}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{i=1}^{n} M_{i,j}^2$, ce qui donne l'inégalité

$$\forall x\in S^{n-1},\ \ \|Mx\| \le \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} M_{i,j}^2}$$

et le passage au max conduit à l'inégalité

$$\|M\|_{op} \le \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} M_{i,j}^2}$$

- Montrons que $\|M\|_{op}=\sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} M_{i,j}^2}$ si, et seulement si, $\mathrm{rang}(M)\le 1$.

Soit $x={}^t(x_1,\dots,x_n)\in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op}=\|Mx\|$, alors $\|M\|_{op}^2=\sum_{i=1}^{n}(Mx)_i^2=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j)^2 \le \sum_{1\le i,j\le n} M_{i,j}^2$, donc $\|M\|_{op}=\sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} M_{i,j}^2}$ si, et seulement si, $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2-(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j)^2\right)=0$ et puisque $\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2-(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j)^2\ge 0$, alors l'égalité a eu lieu si, et seulement si, $\forall j\in[[1,n]]$, $\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2=(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j)^2$, c'est l'égalité de Cauchy-Schwarz, qui exige donc $\forall i\in[[1,n]]$, les vecteurs ${}^t(M_{i,1},\dots,M_{i,n})$ et ${}^t(x_1,\dots,x_n)$ sont liés, c'est à dire les lignes de M sont liées. ce qui est équivalent à M est de rang ≤ 1.

7) - - $\forall i,j$, $|M_{i,j}|\le 1$, donc $\|M\|_{op}=\sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} M_{i,j}^2}\le\sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} 1}=\sqrt{n^2}=n$.

- - Si l'égalité est vérifiée, alors $\|M\|_{op}^2=\sum_{1\le i,j\le n} M_{i,j}^2=n^2$, donc $\sum_{1\le i,j\le n}(1-M_{i,j}^2)=0$ et puisque $1-M_{i,j}^2\ge 0$ on obtient $\forall i,j\in[[1,n]]$, $|M_{i,j}|=1$, de plus l'égalité $\|M\|_{op}^2=\sum_{1\le i,j\le n} M_{i,j}^2$ exige par la question 6 que $\mathrm{rang}(M)\le 1$ mais $\|M\|_{op}=n\ne 0$, donc $\mathrm{rang}(M)=1$
Réciproquement, si $\mathrm{rang}(M)=1$ et $\forall i,j\in[[1,n]]$, $|M_{i,j}|=1$, alors l'inégalité de la question 6 devient une égalité, $\|M\|_{op}=\sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} M_{i,j}^2}=n$.
- $M\in\Sigma_n$ si et seulement si, $M={}^t(L_1,\lambda_2L_1,\dots,\lambda_nL_n)$ où $L_1=(M_{1,1},\dots,M_{1,n})$ avec $M_{1,i}=\pm1$ et $\lambda_i=\dfrac{M_{i,1}}{M_{1,1}}=\pm1$, donc Σ_n est en bijection avec $\{-1,1\}^n\times\{-1,1\}^{n-1}$, il est donc de cardinal $2^n2^{n-1}=2^{2n-1}$.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

8) $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^n}{n!} \frac{2^n}{(n+1)...(2n)}$.

or $\forall n \geq 1,\ \frac{2^n}{(n+1)...(2n)} = \left(\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{2}{n+2}\right)...\left(\frac{2}{2n}\right) \leq 1 \times ... \times 1 = 1$ avec égalité si $n = 0$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \mathrm{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

9) On pose $\lambda = \frac{1+x}{2}$, alors $\lambda \in [0,1]$ grâce à $x \in [-1,1]$.
La fonction exp étant convexe, donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \exp(tx) = \exp(\lambda t + (1-\lambda)(-t)) \leq \lambda\exp(t) + (1-\lambda)\exp(-t) = \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$$

10) • X est bornée par 1, donc $-1 \leq X \leq 1$ ce qui permet d'appliquer l'inégalité précédente qui s'écrit

$$\exp(tX) \leq \frac{1+X}{2}\exp(t) + \frac{1-X}{2}\exp(-t)$$

L'espérance est croissante et linéaire, donc $E(\exp(tX)) \leq \exp(t)E\left(\frac{1+X}{2}\right) + \exp(-t)E\left(\frac{1-X}{2}\right)$.
La variable X est centrée, donc $E(X) = 0$ et par suite $E\left(\frac{1+X}{2}\right) = E\left(\frac{1-X}{2}\right) = \frac{1}{2}$, donc

$$E(\exp(tX)) \leq \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2} = \mathrm{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

X est donc $1-$ sous-gaussienne.

• Soit X une variable aléatoire bornée par α et centrée, alors $Y = \frac{1}{\alpha}X$ est une variable aléatoire bornée par 1 et centrée par linéarité de l'espérance, ce qui entraine par la question précédente que

$$\forall u \in \mathbb{R},\ E(\exp(uY)) \leq \exp\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

donc en posant $u = t\alpha$ l'inégalité précédente s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R},\ E(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

c'est à dire X est $\alpha-$ sous-gaussienne.

11) Soit $t \in \mathbb{R}$, $E(\exp(t\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i)) = E(\exp(\sum_{i=1}^{n} \mu_i t X_i)) = E(\prod_{i=1}^{n} \exp(t\mu_i X_i))$.
Les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes, donc aussi pour les variables aléatoires $\exp(t\mu_1 X_1), ..., \exp(t\mu_n X_n)$, donc $E(\prod_{i=1}^{n} \exp(t\mu_i X_i)) = \prod_{i=1}^{n} E(\exp(t\mu_i X_i))$.
or chaque X_i est $\alpha-$ sous-gaussienne, donc
$\forall i \in [[1,n]],\quad \exp(t\mu_i X_i) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2\mu_i^2 t^2}{2}\right)$ ce qui donne avec $\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 1$

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad E(\exp(t\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i)) \leq \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{\alpha^2\mu_i^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha^2\mu_i^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

c'est à dire $\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est $\alpha-$ sous-gaussienne.

12) • $\forall t>0$, on a l'inclusion des événements $(X \geq \lambda) \subset (\exp(tX) \geq \exp(t\lambda))$, donc $P(X \geq \lambda) \leq P(\exp(tX) \geq \exp(t\lambda))$ et par l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\exp(tX)$ et le fait que X est $\alpha-$ sous-gaussienne, on obtient

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(\exp(tX))}{\exp(t\lambda)} \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 - \lambda t}{2}\right)$$

• L'événement $(|X| \geq \lambda)$ s'écrit comme réunion disjointe de deux événements $(|X| \geq \lambda) = (X \geq \lambda) \cup (X \leq -\lambda) = (X \geq \lambda) \cup (-X \geq \lambda)$.
or c'est clair que si X est $\alpha-$ sous-gaussienne, alors $-X$ l'est aussi, donc

$$\forall t>0, \quad P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$$

L'étude de la fonction $t \longmapsto \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$ montre que cette fonction est minorée et atteint son minimum en $t_0 = \frac{\lambda}{\alpha^2}$.
On conclut par passage au min dans linégalité précédente que

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t_0^2}{2} - \lambda t_0\right) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$$

13) On a les inégalités $0 \leq [X] \leq X < [X]+1$ où $[X]$ désigne la variable aléatoire partie entière de X qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.
$\Longrightarrow$ Si X admet une espérance, alors l'inégalité $0 \leq [X] \leq X$ entraine par comparaison que $[X]$ admet aussi une espérance.
$\Longleftarrow$ Si $[X]$ admet une espérance, alors $[X]+1$ l'admet aussi et par l'inégalité $0 \leq X < [X]+1$ on obtient par comparaison que X admet aussi une espérance.
De plus $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (X \geq k) = ([X] \geq k)$, donc $E([X]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$ et par croissance de l'espérance on obtient $E([X]) \leq E(X) \leq E([X]+1) = E([X])+1$, ce qui donne finalement

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$$

14) • $\forall \beta > 0, \ \forall k \in \mathbb{N}^*, \left(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k\right) = \left(\frac{\beta^2 X^2}{2} \geq \ln(k)\right) = \left(|X| \geq \frac{\sqrt{2\ln(k)}}{\beta}\right)$ Donc $P\left(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k\right) = P\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2\ln(k)}}{\beta}\right)$ et puisque X est $\alpha-$ sous-gaussienne on a l'inégalité de la question 12 qui s'écrit $P\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2\ln(k)}}{\beta}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\ln(k)}{\alpha^2\beta^2}\right)$ et par suite

$$P\left(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2} \geq k\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\ln(k)}{\alpha^2\beta^2}\right) = 2\exp\left(\ln\left(k^{-\frac{1}{\alpha^2\beta^2}}\right)\right) = 2k^{-\eta}$$

• Si $\alpha\beta < 1$, alors $\eta > 1$, donc la série de Riemann $\sum k^{-\eta}$ converge, donc par comparaison la série $\sum P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right)$ converge, ce qui assure l'existence de l'espérance pour la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$. De plus $E\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 1 + 2\zeta(\eta)$.
En particulier, si $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\eta = 2$, $\frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{4\alpha^2}$ et avec l'inégalité admise $1 + 2\eta(2) \leq 5$, on obtient

$$E\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leq 5$$

C. Recouvrements de la sphère

15) Raisonnons par l'absurde comme il est indiqué et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que K ne peut être inclu dans une réunion finie de boules fermées de centre dans K et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $x_0 \in K$, K n'est pas inclu dans $B(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$, donc $\exists x_1 \in K \setminus B(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$, ce qui exige $\|x_0 - x_1\| > \frac{\varepsilon}{2}$.
K n'est pas inclu dans $B(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cup B(x_1, \frac{\varepsilon}{2})$, donc $\exists x_2 \in K \setminus B(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cup B(x_1, \frac{\varepsilon}{2})$, ce qui exige $\|x_0 - x_2\| > \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|x_2 - x_1\| > \frac{\varepsilon}{2}$.
On construit donc par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K vérifiant $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ et par suite $\forall i \in [[0, n-1]]$, $\|x_n - x_i\| > \frac{\varepsilon}{2}$.
K étant compact, donc par le théorème de Bolzano-Weistrass, on peut extraire une sous-suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $x \in K$, donc cette sous-suite est de Cauchy, ce qui est en contradiction avec la condition $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(m)}\| > \frac{\varepsilon}{2}$.

16) • Supposons que Λ est infini, alors on se permet de prendre une suite $(x_n)_n$ de Λ qui est une suite de K compact, donc on peut extraire une sous-suite convergente dans K qui devient une suite de Cauchy, ce qui contradictoire avec la condition $\forall x, y \in \Lambda$, $\|x - y\| > \varepsilon$.
• - Posons $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ de cardinal p, alors d'après l'inclusion de la question précédente, $\forall i \in [[1, p]]$, $\exists a_i \in A$ tel que $\lambda_i \in B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$, de plus $\forall i \neq j$, λ_i et λ_j n'appartiennent pas à la même boule, si non on aura $\|\lambda_i - \lambda_j\| \leq \varepsilon$, ce qui est en contradiction avec la condition $\|\lambda_i - \lambda_j\| > \varepsilon$, donc $\mathrm{card}(\Lambda) \leq \mathrm{card}(A)$.
• - On suppose que Λ est de cardinal maximal. Montrons que $K \subset \bigcup_{a\in\Lambda} B(a, \varepsilon)$.
Supposons que K n'est pas inclu dans $\bigcup_{a\in\Lambda} B(a, \varepsilon)$, alors $\exists b \in K$ tel que $\forall a \in \Lambda$, $\|b - a\| > \varepsilon$, donc $\Lambda' = \Lambda \cup \{b\}$ est un sous-ensemble de K vérifiant $\forall x, y \in \Lambda'$, $\|x - y\| > \varepsilon$, ce qui contredit la maximalité de Λ.

17) • - Si $\|x - a\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, alors $\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|a\|$, mais $a \in S^{n-1}$, donc $\|a\| = 1$, et par suite $\|x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1$, ce qui entraine l'inclusion $\forall a \in \Lambda$, $B(a, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$.
• Les inclusions précédentes entrainent $\bigcup_{a\in\Lambda} B(a, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$.
Les boules fermées en dimension finie sont des compacts et la réunion finie de compacts est un compact, donc la finitude de Λ assure la compacité de $\bigcup_{a\in\Lambda} B(a, \frac{\varepsilon}{2})$.
Alors $\mu(\bigcup_{a\in\Lambda} B(a, \frac{\varepsilon}{2})) \leq \mu(B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}))$.
Les boules $B(a, \frac{\varepsilon}{2})$ où $a \in \Lambda$ sont disjointes. En effet s'il existe $x \in B(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(a_2, \frac{\varepsilon}{2})$, alors $\|a_1 - a_2\| \leq \|a_1 - x\| + \|a_2 - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qui est en contradiction avec $\|a_1 - a_2\| > \varepsilon$.
On obtient donc $\sum_{a\in\Lambda} \mu(B(a, \frac{\varepsilon}{2})) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \mathrm{card}(\Lambda) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$, donc $\mathrm{card}(\Lambda) \leq \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$.

18) En prenant $K = S^{n-1}$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la question 16 , on obtient l'existence de Λ_n de cardinal maximal tel que $S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} B(a, \frac{1}{2})$, de plus $\mathrm{card}(\Lambda_n) \leq \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n = 5^n$.

D. Norme d'une matrice aléatoire

19) • - Soit $i \in [[1,n]]$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^{(n)} x_j$ où on a posé $x = {}^t(x_1, ..., x_n) \in S^{n-1}$, donc $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, de plus $M_{i,j}^{(n)}$ sont mutuellement indépendantes et $\alpha-$ sous-gaussiennes , donc d'après la question 11, y_i est $\alpha-$ sous-gaussienne.

• - $E(\exp(\gamma\|y\|^2)) = E(\exp(\sum_{i=1}^{n} \gamma y_i^2)) = E(\prod_{i=1}^{n} \exp(\gamma y_i^2))$, or les $M_{i,j}^{(n)}$ sont mutuellement indépendantes, donc les y_i le sont aussi et par suite les $\exp(\gamma y_i^2)$ sont aussi mutuellement indépendantes, ce qui donne avec $\gamma = \frac{1}{4\alpha^2}$ et l'inégalité de la question 14

$$E(\exp(\gamma\|y\|^2)) = \prod_{i=1}^{n} E(\exp(\gamma y_i^2)) \leq \prod_{i=1}^{n} 5 = 5^n$$

• - De l'égalité $(\|y\| \geq r\sqrt{n}) = (\exp(\gamma\|y\|^2) \geq \exp(\gamma r^2 n))$ et l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\exp(\gamma\|y\|^2)$ et en exploitant l'inégalité précédente , on obtient

$$P\left(\|y\| \geq r\sqrt{n}\right) = P\left(\exp(\gamma\|y\|^2) \geq \exp(\gamma r^2 n)\right) \leq \frac{E(\exp(\gamma\|y\|^2)}{\exp(\gamma r^2 n)} \leq \left(5\exp(-\gamma r^2)\right)^n$$

20) • - Soit Λ_n une partie de S^{n-1} de cardinal majoré par 5^n tel que $S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} B(a, \frac{1}{2})$ et soit $x \in S^{n-1}$, alors $\exists a \in \Lambda_n$ tel que $x \in B(0, \frac{1}{2})$, donc en utilisant que $M^{(n)}$ est $\|M^{(n)}\|_{op}-$ lipschitzienne, on aura

$$\|M^{(n)}x\| \leq \|M^{(n)}(x-a)\| + \|M^{(n)}a\| \leq \|M^{(n)}\|_{op}\|x-a\| + \|M^{(n)}a\| \leq \frac{1}{2}\|M^{(n)}\|_{op} + \|M^{(n)}a\|$$

et le passage au max sur S^{n-1} conduit à $\frac{1}{2}\|M^{(n)}\|_{op} \leq \|M^{(n)}a\|$ et par suite si $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$, alors $\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}$.

• - On vient de montrer que $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n} \Longrightarrow \exists a \in \Lambda_n$ tel que $\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}$, donc on a l'inclusion des événements

$$(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} (\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n})$$

et par suite

$$P\left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \leq P\left(\bigcup_{a\in\Lambda_n} (\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n})\right) \leq \sum_{a\in\Lambda_n} P\left(\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}\right) \leq$$

$$\leq \left(5\exp(-\gamma r^2)\right)^n \sum_{a\in\Lambda_n} 1 = \mathrm{card}(\Lambda_n)\left(5\exp(-\gamma r^2)\right)^n \leq 5^n\left(5\exp(-\gamma r^2)\right)^n = \left(25\exp(-\gamma r^2)\right)^n$$