ENS 2005 ULC MP

Partie I

1.a) Soit $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ une subdivision associée à f. Sur chacun des intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ f est de classe $\mathcal{C}^1$, de plus $f|[x_i, x_{i+1}]$ est continue et $\lim_{x\to x_i, x>x_i} f'(x)$ et $\lim_{x\to x_{i+1}, x<x_{i+1}} f'(x)$ existe et f est à valeurs réelles.
Le théorème de la limite de la dérivée nous permet d'affirmer que $f_i = f_{|[x_i,x_{i+1}]}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Le théorème fondamental de l'analyse nous permet aussi d'affirmer que pour tout i et tout x de $[xi, x_{i+1}]$ on $f(x) = f(x_i) + \displaystyle\int_{x_i}^{x} f_i'(s)\, ds$.
Soit g une fonction quelconque telle que $g_{|]x_i,x_{i+1}[} = f_i'{}_{|]x_i,x_{i+1}[}$, les valeurs de g en les x_i étant choisies quelconques (par exemple nulles). Il résulte immédiatement des propriétés de f que g est dans $\mathcal{C}$ et que pour tout i et tout x de $[xi, x_{i+1}]$ on $f(x) = f(x_i) + \displaystyle\int_{x_i}^{x} g(s)\, ds$.
En particulier $f(x_{i+1}) - f(x_i) = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(s)\, ds$, pour tout i $(0 \le i \le N-1)$.
Or pour tout x de $[0, 1]$ il existe un i tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$. On a alors en utilisant la relasion de Chasles :

$$f(0) + \int_0^x g(s)\, ds = f(0) + \sum_{k<i} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(s)\, ds + \int_{x_i}^{x} g(s)\, ds = f(0) + \sum_{k<i} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) + f(x) - f(x_i) = f(x).$$

q.e.d.

Réciproquement, soit g dans $\mathcal{C}$, $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ une subdivision associée.
C'est un résultat du cours que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(s)$, est définie sur $[0, 1]$ est continue et est dérivable en tout point x où g est continue, de dérivée $g(x)$. Puisque g est dans $\mathcal{C}$, elle possède bien des limites à droite et à gauche en les x_i et par conséquent f est dans $\mathcal{D}$

1.b) Le résultat demandé est faux. Si $g \in \mathcal{C}$ vérifie (1) alors on peut changer la valeur de g en un nombre fini quelconque de points tout en restant dans $\mathcal{C}$ et en conservant (1).
Il faut supposer que la partition est subordonnée à f et à g (à g suffirait). Dans ce cas le résultat découle de la question précédente, puisque $g = f'$ sur $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N-1}]x_i, x_{i+1}[$.
L'auteur du sujet probablement voulu mettre en évidence qu'à f dans $\mathcal{D}$ donnée, deux fonctions de $\mathcal{C}$ vérifiant (1) ne diffèrent qu'en un nombre fini de points et qu'on peut choisir pour dérivée toute fonction égale à la dérivée de f sur $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N-1}]x_i, x_{i+1}[$ où $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ est une partition subordonnée à f.

1.c) Commençons par remarquer que la réunion de deux partitions subordonnées à deux fonctions de $\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{D}$) est une partition subordonnée à chacune des fonctions.
On peut donc se donner une partition $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ subordonnée à chacune des quatre fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2.
On sait déjà que $f_1 f_2$ est continue sur $[0, 1]$. De même $g_1 f_2 + f_1 g_2$ est dans $\mathcal{C}$, par stablilité de la continuité et du passage à la limite vis-à-vis des opérations algébriques.
Sur $D = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N-1}]x_i, x_{i+1}[$, $f_1 f_2$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables, de dérivée $f_1{}'_{|D} f_{2|D} + f_{1|D} f_2{}'_{|D}$, soit $(g_1 f_2 + f_1 g_2)_{|D}$. D'après la question précédente $g_1 f_2 + f_1 g_2$ est donc bien une dérivée de $f_1 f_2$.

2) Pour tout t de $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto (g(x) + t)^2$ est continue par morceaux et positive donc

$$0 \le T(t) = \int_0^1 (g(s) + t)^2\, ds = \int_0^1 g^2(s)\, ds + 2t \int_0^1 g(s)\, ds + t^2.$$

T est un trinôme du deuxième degré positif sur $\mathbb{R}$, sont discriminant est donc négatif ou nul

$$\Delta(T) = 4\left(\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2\right) - \int_0^1 g^2(x)\,dx \leq 0,$$

ce qui est le résultat demandé.

q.e.d.

Il est clair qu'il y a égalité si g est constante à un nombre fini de points près.
Réciproquement, la forme canonique du trinôme conduit à

$$T(t) = \left(t + \int_0^1 g(x)\,dx\right)^2 + \int_0^1 g^2(x)\,dx - \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2.$$

Donc si $\displaystyle\int_0^1 g^2(x)\,dx = \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2$ alors

$$0 = T(-\int_0^1 g(x)\,dx) = \int_0^1 (g(x) - \int_0^1 g(s)\,ds)^2\,dx.$$

En posant $C = \int_0^1 g(x)\,dx$, et en notant $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ une partition subordonnée à g, il vient :

$$0 = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x) - C)^2\,dx.$$

Puis, comme il s'agit d'une somme de nombres positifs :

$$\forall i\ 0 \leq i \leq N-1 \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x) - C)^2\,dx = 0.$$

Mais $(g - C)^2$ est positive et continue sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$, donc nulle car son intégrale est nulle.
On a donc $g(x) = C$ sauf peut-être en certains x_i.

q.e.d.

3) D'après la question 1) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(s)\,ds$ est dans $\mathcal{D}$. $x \mapsto \int_0^1 g(s)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc dans $\mathcal{D}$. Far sommation f est dans $\mathcal{D}$. On vérifie que $f(0) = f(1) = 0$. Ceci prouve que f est dans $\mathcal{D}_0$.
Une dérivée de f est $x \mapsto g(x) - \displaystyle\int_0^1 g(s)\,ds$.

4) Si g est constante égale à C, si θ est dans $\mathcal{D}_0$, alors

$$\int_0^1 g(s)\theta'(s)\,ds = \int_0^1 C\theta'(s)\,ds = C\int_0^1 \theta'(s)\,ds = C(\theta(1) - \theta(0) = 0.$$

La première égalité découle de ce que $g(s) = C$ sans pour un nombre fini de s, la deuxième de la linéarité de l'intégrale, la troisième de ce que θ est dans $\mathcal{D}$ (et de la question 1), la dernière de ce que θ est dans $\mathcal{D}_0$.
Réciproquement, soit g dans $\mathcal{C}$ vérifions et prenons pour θ la fonction f définie à la question précédente. En utilisant l'expression de f' que nous avons déterminée on obtient :

$$0 = \int_0^1 g(s)\left(g(s) - \int_0^1 g(u)\,du\right)\,ds = \int_0^1 (g(s))^2\,ds - \left(\int_0^1 g(u), du\right)^2.$$

D'après la question 2) on en déduit qu'il existe une constante C telle que $g(s) = C$ sauf pour un nombre fini de points.

5) D'après la question 1.c) si f_1 et f_2 sont dans $\mathcal{D}$ de dérivées g_1 et g_2 alors $f_1 f_2$ est dans $\mathcal{D}$ de dérivée $g_1 f_2 + f_1 g_2$. D'après 1.a) on a donc

$$(f_1 f_2)(1) - (f_1 f_2)(0) = \int_0^1 g_1(s) f_2(s)\, ds + \int_0^1 f_1(s) g_2(s)\, ds.$$

C'est la généralisation de l'intégration par parties aux éléments de $\mathcal{D}$.
Appliqu'on cela à notre problème. On prend $f_1 = \theta$, $f_2(s) = \int_0^s g(u)\, du + D$, D quelconque, qui est bien définie et dans $\mathcal{D}$ d'après 1.a). $g_1 = \theta'$, $g_2 = g$. Il en résulte

$$\int_0^1 g(s)\theta(s)\, ds = \theta(1) f_2(1) - \theta(0) f_2(0) - \int_0^1 f_2(s)\theta'(s)\, ds = -\int_0^1 \tilde{f}_2(s)\theta'(s)\, ds.$$

Il s'en suit que

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_0 \qquad \int_0^1 (f(s) - \tilde{f}(s))\theta' s)\, ds = 0.$$

D'après la question 4) il existe une constante C telle $f(s) - f_2(s) = C$ sauf en un nombre fini de points. Il suffit alors de choisir $f\tilde{(}0) = C$, pour que f coïncide avec $\tilde{f}$ sauf en un nombre fini de points.

Partie II

1) On a déjà fait la remarque que $\mathcal{C}$ était stable par produit et addition. Si u est dans $\mathcal{D}_0$, u ainsi que u' sont dans $\mathcal{C}$ et par conséquent u'^2 et $(1-u^2)^2$ aussi et $E_\lambda(u)$ est bien définie. La valeur de l'intégrale $\int_0^1 g(s)\, ds$ ne dépendant pas des valeurs de g que l'on pourrait imposer en un nombre fini de points, la valeur de $E_\lambda(u)$ ne dépend pas du choix de la dérivée de u. C'est bien une fonction de u.

2.a) On a

$$\begin{aligned} ((u+\epsilon\psi)')^2 &= (u')^2 + 2\epsilon u'\psi' + \epsilon^2(\psi')^2, \\ (1-(u_\lambda+\epsilon\psi)^2)^2 = (1-u^2-2\epsilon u\psi - \epsilon^2\psi^2)^2 &= (1-u^2)^2 - 4\epsilon\left((1-u^2)u\psi\right) + \epsilon^2 A_2(u,\psi) + \epsilon^3 A_3(u,\psi) + \epsilon^4 A_4(u,\psi). \end{aligned}$$

En remplaçant u par u_λ, puis en intégrant on obtient, sans expliciter les derniers coefficients :

$$E_\lambda(u_\lambda + \epsilon\psi) = E_\lambda(u_\lambda) + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + a_3\epsilon^3 + a_4\epsilon^4 = \alpha_\psi(\epsilon),$$

avec

$$a_1 = \int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x) - \lambda(1-(u_\lambda(x))^2)^2 u_\lambda(x)\psi(x))\, dx.$$

En remarquant

$$\lim_{\epsilon\to 0, \epsilon\neq 0} \frac{E_\lambda(u_\lambda+\epsilon\psi) - E_\lambda(u_\lambda)}{\epsilon} = \alpha_\psi'(0) = a_1$$

on obtient le résultat demandé.

2.b) Pour tout ψ dans $\mathcal{D}_0$ et tout ϵ dans $\mathbb{R}$ la fonction $u_\lambda + \epsilon\psi$ est dans $\mathcal{D}_0$. Parconséquent $\alpha_\psi(\epsilon) \geq E_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\psi(0)$. α_ψ admet donc un minimum en 0. Or on vient de voir que α_ψ est dérivable en 0, donc $\alpha_\psi'(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_0, \quad \int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x) - \lambda(1-(u_\lambda(x))^2)u_\lambda(x)\psi(x)\, dx = 0.$$

q.e.d.

2.c) On applique alors le résultat de la ques 5) de la première partie, avec $f = u_\lambda'$ qui est dans $\mathcal{C}$ et $g = -\lambda(1-u^2)u$ qui est dans $\mathcal{D}$ donc dans $\mathcal{C}$.
On en déduit que u_λ' coïncide avec le $\tilde{f}$ associé à g. Mais puisque g est continue on peut affirmer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et en particulier continue. Quitte à modifier u_λ' en un nombre fini de points, u_λ possède aumoins une dérivée continue. La formule d'intégration de la question 1.a (de la première partie, couplée au théorème fondamental de l'analyse montrer que u_λ est de classe $\mathcal{C}^1$.

De plus en choisissant pour dérivée de u_λ sa dérivée classique, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'_\lambda(x) = -\lambda \int_0^x (1-(u_\lambda(s))^2)u_\lambda(s)\,ds.$$

Puisque $s \mapsto (1-(u_\lambda(s))^2)u_\lambda(s)$ est continue, a l'aide du théorème fondamentale de l'analyse nous pouvons en déduire que u'_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et u_λ de classe $\mathcal{C}^2$) avec

$$\forall x \in [0,1] \qquad u''_\lambda(x) = -\lambda(1-(u_\lambda(x))^2)u_\lambda(x). \tag{$*$}$$

C'est le résultat demandé.
De la relation $u''_\lambda = -\lambda(1-u_\lambda^2)u_\lambda$,il résulte que si u_λ est de classe $\mathcal{C}^k$ alors u''_λ aussi et u_λ est de classe $\mathcal{C}^{k+2}$. Cet argument permet de montrer que u_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2.d) En multipliant membre à membre $(*)$ par $u'_\lambda(x)$ il vient

$$\forall x \in [0,1] \qquad u''_\lambda(x)u'_\lambda(x) = -\lambda(1-(u_\lambda(x))^2)u_\lambda(x)u'_\lambda(x).$$

En reconnaissant $u''_\lambda(x)u'_\lambda(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(u'_\lambda(x))^2$ et $dsu_\lambda(x)u'_\lambda(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(u_\lambda(x))^2$, en intégrant terme à terme des fonctions de classe suffisante on obtient

$$\forall x \in [0,1] \quad \frac{1}{2}(u'_\lambda(x)^2 - u'_\lambda(0))^2 = -\lambda\left(\frac{1}{2}(u_\lambda(x))^2 - \frac{1}{2}u_\lambda(0))^2 - \frac{1}{4}(u_\lambda(x))^2 + \frac{1}{4}(u_\lambda(0))^2\right),$$

puis

$$\forall x \in [0,1] \quad (u'_\lambda(x)^2 - u'_\lambda(0))^2 = \frac{\lambda}{2}\left((-2u_\lambda(x))^2 - 2u_\lambda(0))^2 + (u_\lambda(x))^2 + (u_\lambda(0))^2\right),$$

soit

$$\forall x \in [0,1] \quad (u'_\lambda(x))^2 = \frac{\lambda}{2}\left(((u_\lambda(x))^2-1)^2 - C_\lambda\right),$$

pour un C_λ adéquat (on utilise ici $\lambda \neq 0$).