Notations

Dans tout le problème, on notera $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur $[0,1]$ et continues par morceaux. On rappelle que $g \in \mathcal{C}$ signifie qu'il existe une subdivision de $[0,1]$, $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, g soit continue sur chaque intervalle de la forme $]x_i, x_{i+1}[$, et qu'en plus g admettent des limites finies, notées $g(x_i + 0)$ et $g(x_{i+1} - 0)$ à gauche et droite de chacune des extrémités de ces intervalles.
Par ailleurs, on définit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions réelles f continues sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Cela signifie que f est continue sur $[0,1]$ et qu'il existe une subdivision de $[0,1]$, $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, f soit continûment dérivable sur chaque intervalle de la forme $]x_i, x_{i+1}[$, et qu'en plus f' admettent des limites finies, notées $f'(x_i + 0)$ et $f'(x_{i+1} - 0)$ à gauche et droite de chacune des extrémités de ces intervalles.
Dans ces deux cas la partition $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ est appelée *partition subordonnée* à g (ou a f). On remarquera qu'il n'y a pas qu'une seule partition subordonnée à une fonction f donnée.
Enfin, on note $\mathcal{D}_0 = \{u \in \mathcal{D}, u(0) = u(1) = 0\}$.

Partie I

1.a) Soit $f \in \mathcal{D}$. Démontrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}$ telle que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = f(0) + \int_0^x g(s)\, ds. \tag{1}$$

Réciproquement, montrer que si $g \in \mathcal{C}$, la fonction définie par

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \int_0^x g(s)\, ds$$

est un élément de $\mathcal{D}$.

1.b) Soient $f \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathcal{C}$ vérifiant (1). Montrer que si on note $\{x_1, \ldots, x_N\}$ une partition subordonnée à f, alors g est définie de manière unique sur $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N-1}]x_i, x_{i+1}[$. Dans toute la suite du problème, une fonction $g \in \mathcal{C}$ vérifiant (1) sera appelée une **dérivée** de f. pour tout f de $\mathcal{D}$ on notera f' une dérivée de f.

1.c) Montrer que si f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathcal{D}$ possédant restectivement des dérivées g_1 et g_2, alors le produit $f_1 f_2$ appartient à $\mathcal{D}$ et admet $f_1 g_2 + f_2 g_1$ comme dérivée.

2) Soit g dans $\mathcal{C}$. Démontrer que

$$\int_0^1 g^2(x)\, dx \geq \left(\int_0^1 g(x)\, dx \right)^2$$

.
Indication : On pourra utiliser

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \int_0^1 (g(x) + t)^2\, dx \geq 0.$$

Montrer aussi qu'il y a égalité si et seulement si il existe une constante C telle que $g(x) = C$ sauf éventuellement en un nombre fini de points x de $[0,1]$.

3) Soit g dans $\mathcal{C}$. Montrer que la fonction f définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x g(s)\, ds - x \int_0^1 g(s)\, ds,$$

appartient à l'ensemble $\mathcal{D}_0$.

4) Soit $g \in \mathcal{C}$, démontrer que g vérifie

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_0, \quad \int_0^1 g(s)\theta'(s)\,ds = 0$$

si et seulement si il existe une constante C telle que $g(x) = C$ sauf éventuellement en un nombre fini de points x de $[0,1]$.

5) Soit $f, g \in \mathcal{C}$ vérifiant

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_0, \quad \int_0^1 (f(s)\theta'(s) + g(s)\theta(s))\,ds = 0.$$

Montrer qu'il existe $\tilde{f} \in \mathcal{D}$ telle que f coïncide avec $\tilde{f}$ sauf éventuelllement en un nombre fini de points et que

$$\forall x \in [0,1], \quad \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) + \int_0^x g(s)\,ds.$$

Observer de plus que si $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ alors $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

Partie II

Pour tout $u \in \mathcal{D}_0$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, on note

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\,dx + \frac{\lambda}{4}\int_0^1 (1 - (u(x))^2)^2\,dx.$$

1) Montrer que $E_\lambda(u)$ est bien définie pour tout $u \in \mathcal{D}_0$ et qu'en particulier sa valeur ne dépend pas du choix possible de u' parmi les dérivées de u.

A partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, on admettra que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, le problème de minimisation

$$\min_{u \in \mathcal{D}_0} E_\lambda(u), \tag{2}$$

a au moins une solution que l'on notera u_λ. Ainsi u_λ vérifie

$$\begin{cases} u_\lambda \in \mathcal{D}_0, \\ \forall v \in \mathcal{D}_0 \quad E_\lambda(v) \geq E_\lambda(u_\lambda). \end{cases}$$

2.a) Soit $\psi \in \mathcal{D}_0$. Montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0, \epsilon \neq 0} \frac{E_\lambda(u_\lambda + \epsilon\psi) - E_\lambda(u_\lambda)}{\epsilon} = \int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x) - \lambda(1 - (u_\lambda(x))^2)u_\lambda(x)\psi(x)\,dx.$$

2.b) En déduire que u_λ vérifie

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_0, \quad \int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x) - \lambda(1 - (u_\lambda(x))^2)u_\lambda(x)\psi(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

2.c) Montrer que u_λ' coïncide avec une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. En déduire que u_λ est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa dérivée au sens classique vérifie encore (3). Montrer que u_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle

$$-u_\lambda''(x) = \lambda(1 - (u_\lambda(x))^2)u_\lambda(x),$$

sur $]0,1[$, puis que u_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$.

2.d) Montrer qu'il existe une constante $C_\lambda \in \mathbb{R}$ telle

$$\forall x \in]0,1[, \quad (u'(x))^2 = \frac{\lambda}{2}\big(((u_\lambda(x))^2 - 1)^2 - C_\lambda\big).$$

Le problème continuait...