Les polynômes de Tchebychev

1) Comme on le verra par la suite, il existe plusieurs manières de prouver l'existence d'un tel polynôme. je vous livre ici la méthode qui me semble la plus efficace.
On raisonne par récurence forte. Il est clair que le résultat est vrai pour $n = 0$ ($T_0 = 1$) et $n = 1$ ($T_1 = X$). On suppose $n \geq 2$ et le résultat vrai pour tout p, $p < n$, en particulier $p = n - 1$ et $p = n - 2$.
On a la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos((nx)) + \cos((n-2)x) = 2\cos(x)\cos((n-1)x),$$

qui découle de la formule classique

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Il en résulte que le résultat est bien vrai à l'ordre n en choisissant

$$T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-1}. \tag{1}$$

L'unicité de T_n résulte de ce que $\{\cos x; x \in \mathbb{R}\}$ est infini, et que deux polynômes égaux sur un ensemble infini de valeurs sont égaux.

2) Il résulte immédiatement de la relation (1), par récurrence, que pour $n \geq 0$ T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1}. T_0 est de degré 0, de coefficient dominant 1.

3) Commençons par chercher le zéros de T_n de la forme $x = \cos(\pi)$. $T_n(\cos(\phi)$ si et seulement si $\cos(n\phi) = 0$, c'est-à-dire $\phi = \frac{\pi}{2n} + k\frac{pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Or les $\frac{\pi}{2n} + k\frac{pi}{n}$, $0 \leq k \leq n-1$, sont n valeurs distinctes de l'intervalle $]0, \pi[$, intervalle sur lequel la restriction de cos est injective.
Il en résulte que les

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1$$

sont n zéros distincts de T_n, polynôme de degré n. Ce sont donc exctement les zéros de T_n.
Les zéros de P_n sont les mêmes que ceux de T_n.

4) Si x est dans $[-1, 1]$ il existe un unique ϕ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos(\phi)$. On aura donc $T_n(x) = \cos(n\phi)$ et par conséquent $|T_n(x)| \leq 1$. Comme de plus $T_n(1) = T_n(\cos(0) = \cos(n0) = 1$, on peut affirmer

$$b_n = \sup_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| = \frac{1}{a_n} \sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = \frac{1}{a_n}.$$

Plus précisément

$$\forall n \geq 1 \quad b_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad b_0 = 1.$$

5) L'énoncé aurait du préciser qu'à partir de maintenant on suppose $n \geq 1$. c'est ce que nous faisons.
Pour tout point x de $[-1, 1]$ il existe un unique ϕ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos(\phi)$ et on aura donc $T_n(x) = \cos(n\phi)$.
On aura $|P_n(x)| = b_n$ si et seulement si $|T_n(x)| = 1$, c'est-à-dire $|\cos n\phi)| = 1$, soit $\phi = k\pi$, $0 \leq k \leq n$.
On a donc $|P_n(x)| = b_n$ pour les $n + 1$ valeurs (la fonction cos étant décroissante sur $[0, \pi]$, on utilise la transformation $k \mapsto n + 1 - k$ pour mettre les y_k dans l'ordre et respecter l'indexation)

$$y_k = \cos\left(\frac{(n+1-k)\pi}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n.$$

6) On a, pour $0 \leq k \leq n$,

$$(P_n - Q)(y_k) = P_n(y_k) - Q(y_k) = (-1)^{n+1-k} b_n - Q(y_k) = (-1)^{n+1-k} k b_n \Big(1 - (-1)^{n+1-k} \frac{Q(y_k)}{b_n} \Big).$$

Or $\left| (-1)^{n+1-k} \dfrac{Q(y_k)}{b_n} \right| < 1$, donc $\left(1 - (-1)^{n+1-k} \dfrac{Q(y_k)}{b_n} \right) > 0$ et $(P_n - Q)(y_k)$ est du signe de $(-1)^{n+1-k}$, **au sens strict**.
Par conséquent, puisque $P_n - Q$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $P_n - Q$ possède au moins un zéro sur $]y_k, y_{k+1}[$ (intervalle ouvert grâce à la remarque du paragraphe précédent), $0 \leq k \leq n-1$. $P - Q_n$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ (différence de deux polynômes unitaires de degré n) possédant au moins n zéros distincts. Donc $Q = P_n$ et $\sup_{x \in [-1,1]} |Q(x)| = b_n$. C'est une contradiction.
Par conséquent : si Q est un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ on $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |Q(x)| \geq b_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, l'égalité ayant lieu pour P_n.

7) D'après les questions précédentes (appliquées à $n+1$) le minimum de l'expression est atteint lors que

$$(x - x_0) \cdots (x - x_n) = P_{n+1},$$

il vaut $\dfrac{1}{2^n}$. Les x_i sont alors les zéros de P_{n+1}, soit

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n+1} \right).$$

On remarquera qu'ici on peut s'autoriser $n = 0$.
Remarquons aussi que nous n'avons pas démontré que le minimum de peut être atteint que dans ce cas là (même si c'est effectivement le cas).

8) Pour tout x réel on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\cos nx &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\
&= \frac{(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n}{2} \\
&= \frac{(\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos x)^{n-k} (i)^k (\sin x)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos x)^{n-k} (-i)^k (\sin x)^k \right) \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (\cos x)^{n-2p} (-1)^p (\sin x)^{2p} \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (\cos x)^{n-2p} (-1)^p (1 - (\cos x)^2)^p \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ \binom{n}{2p} (\cos x)^{n-2p} (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k (\cos x)^{2k} \right\} \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2p} \binom{p}{k} (-1)^{p+k} (\cos x)^{n-2(p-k)} \\
\cos(nx) &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i=0}^{p} \binom{n}{2p} \binom{p}{i} (-1)^i (\cos x)^{n-2i} \quad (i = p - k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^i\left(\sum_{p=i}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\binom{p}{i}\right)(\cos x)^{n-2i}\\
\cos(nx) &= S_n(\cos x)
\end{aligned}$$

Avec $S_n=\sum_{k=0}^{n} b_kX^k$, où $b_{n-2i}=(-1)^i\sum_{p=i}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\binom{p}{i}$, et b_{n-2i-1}, pour les entiers i cohérents.
Par unicité du polynôme T_n, vue à la première question, on a $T_n=S_n$.

9) La relation de récurrence a été établie à la question 1). Son application donne immédiatement :

$$\begin{aligned}
T_0 &= 1\\
T_1 &= X\\
T_2 &= 2X^2-1\\
T_3 &= 4X^3-3X\\
T_4 &= 8X^4-8X^2+1\\
T_5 &= 16X^5-20X^3+5X
\end{aligned}$$

10) Pour tout x réel on a $T_n(\cos x)=\cos(nx)$. En dérivant une, puis deux fois, on obtient :

$$\begin{aligned}
-\sin xT_n'(\cos x) &= -n\sin(nx)\\
-\cos xT_n'(\cos x)+\sin^2 xT_n''(\cos x) &= -n^2\cos(nx)\\
(1-\cos^2 x)T_n''(\cos x)-\cos xT_n(\cos x)+n^2T_n(\cos x) &= 0
\end{aligned}$$

L'ensemble des $\cos x$ on en déduit que T_n vérifie l'équation différentielle (dans $\mathbb{R}[X]$)

$$(1-X^2)P''-XP'+n^2P=0 \tag{E}$$

q.e.d.

Soit Q un autre polynôme satisfaisant (E), si $Q=0$ il est clairement colinéaire à T_n.
Sinon Q est de degré $d\geq 0$, de coefficient dominant $c_d\neq 0$. Il en résulte que $(1-X^2)Q''-XQ'+n^2Q$ est de degré au plus d et que le coefficient de X^d vaut

$$-d(d-1)c_d-dc_d+n^2c_d=(n^2-d^2)c_d.$$

Or ce coefficient doit être nul et $c_d\neq 0$ donc $d=n$.
Par linéarité de l'équation différentielle le polynôme $R=Q-c_nT_n$ est solution de (E), or il n'est pas de degré n, donc d'après l'analyse précédente il est donc nul et $Q=c_nT_n$

q.e.d.

On cherche T_6 sous la forme

$$T_6=32X^6+aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX^+f$$

Soit $Q=(1-X^2)T''-XT'+n^2T=0$, un calcul , demandant quand même un peu de soin donne

$$Q=21aX^5+(960+20b)X^4+(20a+27c)X^3+(12b+32d)X^2+(6c+35e)X+(2d+3-f).$$

La contrainte $Q=0$ donne, en examinant le polynôme dans l'ordre des puissances décroissantes :

$$a=0,\ b=-48,\ c=0,\ d=18,\ e=0,\ f=-1,$$

c'est-à-dire

$$T_6=32X^6-48X^4+18X^2-1.$$

q.e.d.

On va appliquer la même technique dans le cas général.
On suppose $n \geq 2$ pour facilité la manipulation des sommes. On pourra vérifier que le résultat finalement obtenu est aussi valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
On écrit $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$ l'exemple de T_6 ayant montrer qu'il vaut mieux lire le polynôme dans l'ordre des puissances décroissantes. Les résultats des questions précédentes nous autoriserait à chercher T_n sous la forme $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} b_k X^{n-2k}$ ce qui nous simplifierait encore les calculs. Pour exposer la méthode, qui sera utilisée plus tard dans le cours, dans toute sa généralité on conserve la première notation.

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} \\
T_n'' &= \sum_{k=0}^{n-2} (n-k)(n-k-1) a_{k-2} X^{n-k-2} \\
T_n'' &= \sum_{k=2}^{n} (n-k+2)(n-k+1) a_k X^{n-k} \\
X^2 T_n'' &= \sum_{k=0}^{n-2} (n-k)(n-k-1) a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (n-k)(n-k-1) a_k X^{n-k} \\
T_n' &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_k X^{n-k-1} \\
X T_n' &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_k X^{n-k}
\end{aligned}$$

Soit $Q = (1 - X^2) T_n'' - X T_n' + n^2 T_n$. En regroupant les résultats des calculs partiels :

$$\begin{aligned}
Q = (-n(n-1) - n + n^2) a_0 X^n + (-(n-1)(n-2) - (n-1) + n^2) a_1 X^{n-1} \\
+ \sum_{k=2}^{n} ((-(n-k)(n-k-1) - (n-k) + n^2) a_k + (n-k+2)(n-k+1) a_{k-2}) X^{n-k}.
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
Q = 0\, a_0 X^n + (n^2 - (n-1)^2) a_1 X^{n-1} \\
+ \sum_{k=2}^{n} ((n^2 - (n-k)^2) a_k + (n-k+2)(n-k+1) a_{k-2}) X^{n-k}.
\end{aligned}$$

On veut $Q = 0$, c'est-à-dire la nullité de tous les coefficients de Q.
$0\, a_0$ est compatible avec $a_0 = 2^{n-1}$
Il vient ensuite $a_1 = 0$, puis

$$\forall k \geq 2 \quad a_k = -\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(n^2 - (n-k)^2)} a_{k-2}.$$

Dans un premier temps on obtient facilement par récurrence

$$\forall i \; 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \quad a_{2i+1} = 0,$$

et ensuite, pour $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$$a_{2i} = -\frac{(n-2i+2)(n-2i+1)}{(n^2 - (n-2i)^2)} a_{2i-2} = -\frac{(n-2i+2)(n-2i+1)}{4(n-i)i} a_{2i-2}.$$

En imaginant la formule dévelopée sans simplification jusqu'à a_0, on dévine le résultat

$$a_{2i} = (-1)^i \frac{n!(n-i-1)!}{(n-2i)!(n-1)!i!2^{2i}} a_0$$

formule qui pourrait être vérifiée par récurrence et qui se simplifie encore en

$$a_i = (-1)^i n \frac{(n-i-1)!}{(n-2i)!i!} 2^{(n-2i-1)}.$$

On voit apparaître un coefficient binomial, et finalement on peut écrire, pour $n \geq 2$:

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} 2^{(n-2i-1)} X^{n-2i}.$$

La formule reste valable pour $n = 1$, pour $n = 0$, elle n'a pas de sens. D'ailleurs dans ce cas a_0 ne vaut pas 2^{n-1}, on écrit $T_0 = 1$.