Probabilités

Exercice 1:
1) Soit X une variable aléatoire réelle et bornée. montrer que pour d dans $\mathbb{R}$ $P(X \geq d) \leq \inf_{t>0} \dfrac{E(e^{tX})}{e^{td}}$.
2) Soit $p \in]0,1[$. Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$. Que donne l'inégalité précédente pour X_n et $d = \alpha n$?

Exercice 2: Soit $X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, telles que $\mathbb{P}(X_n = -1) = p$, $P(X_n = 1) = 1 - p$ avec $p \in]0,1[$. On pose $Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$, $a_n = \mathbb{P}(Z_n = -1)$ et $b_n = \mathbb{P}(Z_n = 1)$.
1) Calculer $a_n + b_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
2) Calculer a_n en fonction de n et p.
3) Exprimer $E(Z_n)$, $\mathrm{Cov}(\mathrm{Z_n}, \mathrm{Z_{n+1}})$ en fonction de n et p. Déterminer la limite de $E(Z_n)$ lorsque $n \to +\infty$.
4) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Z_1 et Z_2 soient indépendantes.

Exercice 3: Montrer que si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.

Exercice 4: Soit p dans $[0,1]$, $q = 1-p$ et $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $[0,1]$. Si $(x_1, \ldots, x_m)$ est un élément de $\{0,1\}^m$ où m est un entier, on pose $P(\{(x_1, \ldots, x_m)\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}) = p^k q^{m-k}$ où k est le nombre de i dans $[1, m]$ tels que $x_i = 1$.
1) Expliquer comment par additivité on peut étendre la définition de P à l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties de la forme $A \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ où A est une partie de $\{0,1\}^m$, m entier quelconque.
2) Soit E un ensemble quelconque et S une partie de $\mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il existe au moins une tribu contenant S. Montrer que l'intersection de toutes les tribus contenant S est une tribu contenant S et que celle-ci est la plus petite tribu contenant S. On l'appelle la tribu engendrée par S.
3) Soit $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. On admet que P peut être prolongée en une probabilité, toujours notée P, faisant de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.
4) On note $X(x)$ le plus petit indice i tel que $(x_i, x_{i+1}) = (0,1)$. Quelle est la loi de X, quelle est son espérance ?
5) (Moins facile) Si on gagne dès que le motif qu'on a choisi apparaît, vaut-il mieux parier sur $(0,0,1)$ où sur $(1,0,0)$?

Exercice 5: On considère une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ainsi qu'une autre variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Toutes ces variables sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

On suppose de plus qu'il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'espérance finie, telle que

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad |X_n| \leq Y.$$

Montrer que chaque X_n est d'espérance finie, ainsi que X, et que

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X).$$

Indication : Si p est un entier on pourra établir puis utiliser la majoration :

$$|E(X) - E(X_n)| \leq \sum_{k=-p}^{p} |k||P(X_n = k) - P(X = k)| + 2 \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(Y = k).$$

On pourra aussi penser à la formule de Wald donnant l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs entières.