Exercices classiques I

Exercice 1: Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction quatre fois fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$. Alors, pour tout x de $[0,1]$ il existe c dans $]0,1[$ tel que

$$f(x) = f^{(4)}(c)\frac{x^2(1-x)^2}{24}.$$

Exercice 2: Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ sont des réels positifs alors :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Exercice 3: Si A est une partie non vide d'un espace normé, montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 4: Montrer que dans un espace vectoriel normé tout sous-espace de dimension finie est fermé.

Exercice 5: *Le lemme de Cesàro*
Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé quelconque convergeant vers la limite l. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

converge aussi vers l.

Exercice 6: Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$.

Exercice 7: Soit

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1) Montrer que la suite (α_n) est convergente, on note α sa limite.
2) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha$.

Exercice 8: On définit f par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 9:
1) Etudier la convergence simple de la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$, définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,n], \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$.

Exercice 10: Prouver que pour tout couple (z, z') de nombres complexes : $\exp(z + z') = \exp(z)\ \exp(z')$.

Exercice 11: Soit $f(z)$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r \in]0, R[$.
1) Calculer, si n est un entier

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\, dt.$$

2) Calculer

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\, dt.$$