# Séries de fonctions – Séries entières

**Exercice 1:** *CCS*
On se donne la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R$. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_{3n} z^n$ ?

**Exercice 2:** *TPE*
1) Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n}$.
2) Calcul de la somme de la série.

**Exercice 3:** *TPE*
Soit $a$ dans $]-1,1[$. On définit

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin a^n x \end{array}$$

Montrer que $f$ possède un développement en série entière. En donner le rayon de convergence et former ce développement.

**Exercice 4:** *CCM*
Trouver une solution sous la forme d'une série entière de

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

L'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

**Exercice 5:** *CCS*
Soit la suite $a$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 2\frac{a_{n-1}}{n+1}$.
1) Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ?
2) Valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ? (utiliser une équation différentielle)

**Exercice 6:** *CCS*
1) On considère $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ où $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente.
   a) Rayon de convergence de la série entière définissant $f$ ?
   b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}$ converge uniformément sur tout segment.

2) On pose $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(k)}$.
   a) Montrer que $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $F$
   c) En déduire une expression de $F$ à l'aide de $f$.

**Exercice 7:** *ENS Paris-Lyon-Cachan*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $f$ sa somme. Soit $q$ dans $\mathbb{C}$ avec $0 < |q| < R$. Soit $(b_n)$ dans $(\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{q}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = f(q).$$