Séries numériques

Exercice 1:
1) Donner une valeur de n telle que
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>10.$$

2) Ecrire un programme en Python et/ou dans le langage de votre calculatrice permettant de trouver le plus petit entier n tel que :
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>4.$$

Exercice 2: Nature de la série de terme général : $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n}$.

Exercice 3: Nature de la série de terme général : $u_n=\dfrac{1}{1+2^{1/2}+\cdots+n^{1/n}}$.

Exercice 4: On considère une série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ telle que pour n assez grand
$$\sqrt[n]{u_n}\leq 1-\frac{1}{n^\alpha},\ 0<\alpha<1.$$
Montrer que cette série est convergente.

Exercice 5: Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes positifs. Montrer qu'elle est de même nature que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$, où
$$v_n=\frac{1}{n}(u_{n+1}+\cdots+u_{2n}).$$

Exercice 6: Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\ln\left(\dfrac{(\ln(n+1))^2}{\ln n\ \ln(n+2)}\right)$, $n\geq 2$. Calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Exercice 7: On se donne une série divergente $\sum_{n\geq 1} u_n$, à termes strictement positifs. On définit $p_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ et $v_n=\frac{u_n}{p_n}$.Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente.

Exercice 8: Etudier la convergence des séries dont le terme général est
$$\frac{a}{n}-\ln(n+b)+\ln n,\quad \cos 1-\cos\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad \cos\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{\alpha}{n}+\beta\sqrt{1+\frac{1}{n}}.$$

Exercice 9: Nature de la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

Exercice 10:
La série $\sum(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$ est-elle convergente ?

Exercice 11: Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ est convergente.

Exercice 12: $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente. On pose $r_n=\displaystyle\sum_{p=n}^{\infty} u_p$. Etudier la série de terme général $\dfrac{u_n}{r_n^\alpha}$, $(\alpha\in\mathbb{R})$.