Espaces vectoriels normés II

Exercice 1: Soient f et g deux applications continues de E vers $\mathbb{R}$.
Montrer que l'ensemble $A = \{x; f(x) = g(x)\}$ est fermé et que l'ensemble $B = \{x; f(x) < g(x)\}$ est ouvert.

Exercice 2: Si K est un compact et si F est un fermé relativement à K alors F est compact.

Exercice 3: Soit $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de compacts (i.e. $K_{n+1} \subset K_n$).
Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Exercice 4: Soit A et B deux compacts disjoints de E.
Montrer que $d(A, B) = \inf\{\|x - y\|; (x, y) \in A \times B\} > 0$.

Exercice 5: Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction 1-lipschitzienne. On définit (x_n) par la donnée de x_0 dans $[a, b]$ et la relation de récurrence

$$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}.$$

Montrer que (x_n) converge vers un point fixe de f.

Exercice 6: Justifier (topologiquement) l'existence d'un cercle de plus grand rayon contenu dans un triangle. Montrer qu'il s'agit du cercle inscrit.

Exercice 7: Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.
1) Soit x un point de Ω. Montrer qu'il existe un plus grand intervalle contenant x et contenu dans Ω. Prouver que c'est un intervalle ouvert.
2) En déduire que Ω est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 8: Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E et f une application de K dans K telle que

$$\forall (x, y) \in K^2 \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que f possède un unique point fixe.
Indication : Considérer la fonction $x \mapsto \|f(x) - x\|$.

Exercice 9: Caractériser les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que l'image de tout ouvert soit un ouvert.