X 2018

Epreuve de remplacement

Pour des raisons qui apparaîtront dans la Troisième Partie, on utilise deux entiers naturels distincts n (minuscule) et N (majuscule). Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé.

On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n. Le sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ formé des polynômes pairs (c'est-à-dire vérifiant $P(-X) = P(X)$) est noté Π_n, et celui des polynômes impairs (c'est-à-dire vérifiant $P(-X) = -P(X)$) est noté J_n.

On définit l'ensemble A_N formé des $P \in \mathbb{R}_N[X]$, tels que $P(-1) = P(1) = 1$, qui satisfont de plus $P(x) \geqslant 0$ pour tout x dans l'intervalle $[-1, 1]$. On définit sur $\mathbb{R}_N[X]$ une forme linéaire L par

$$L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\, dx.$$

L'objet du problème est l'étude de sa borne inférieure a_N sur le sous-ensemble A_N :

$$a_N = \inf\{L(P) \mid P \in A_N\}.$$

Π_n est l'ensemble des polynômes pairs de $\mathbb{R}_n[X]$
J_n est l'ensemble des polynômes impairs de $\mathbb{R}_n[X]$

Questions préliminaires

1. (a) Vérifier que A_N est une partie convexe de $\mathbb{R}_N[X]$.
   (b) Montrer que l'expression
   $$\|P\|_1 = \int_{-1}^{1} |P(x)|\, dx$$
   définit une norme sur $\mathbb{R}_N[X]$.
   (c) Montrer que A_N est fermé dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}_N[X], \|\cdot\|_1)$.
2. (a) Montrer que la borne inférieure de L sur A_N est atteinte.
   Dans la suite, on notera B_N l'ensemble des $P \in A_N$ tels que $L(P) = a_N$.
   (b) Montrer que B_N est une partie convexe compacte.
   (c) Vérifier que B_N contient un polynôme pair. On note R_N un tel polynôme

Première Partie

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\, dx,$$

et de la norme associée

$$\|P\|_2 = \sqrt{\langle P, P\rangle}$$

(on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire et d'une norme).

Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme

$$P_j(X) = \frac{1}{2^j\, j!}\, \frac{d^j}{dX^j}\left[(X^2-1)^j\right].$$

Par convention, $P_0 = 1$.

3. (a) Quel est le degré de P_j ?
   (b) Montrer que P_j est un polynôme pair ou impair, selon la valeur de j.
   (c) Montrer que $P_j(1) = 1$ et $P_j(-1) = (-1)^j$.
4. Au moyen de l'intégration par parties, montrer que la famille $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ est orthogonale dans $\mathbb{R}_n[X]$.
5. On note

$$g_j = \int_{-1}^{1} P_j(x)^2 dx, \qquad I_j = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^j dx.$$

   (a) Établir une relation entre g_j et I_j.
   (b) Trouver une relation entre I_j et $I_{j-1} - I_j$, et en déduire une relation de récurrence pour la suite $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$.
   (c) En déduire la valeur de I_j, puis celle de g_j.
6. (a) Montrer que la famille $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) En déduire que la famille $(P_{2j})_{0 \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}}$ est une base de Π_n, tandis que la famille $(P_{2j+1})_{0 \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2}}$ est une base de J_n.

Deuxième Partie (*)

Troisième Partie

On note n la partie entière de $\frac{N}{2}$. On poursuit l'étude du polynôme R_N.

12. Montrer que $\deg R_N = 2n$.
13. Montrer que R_N est le carré d'un polynôme : $R_N(X) = U_N(X)^2$ où $U_N(1) = 1$ et $U_N(-1) = \pm 1$. Que peut-on dire de la parité de U_N ?
14. On suppose dans cette question que U_N est pair ; on a donc $U_N \in \Pi_n$. Dans Π_n, l'équation $P(1) = 1$ définit un sous-espace affine noté H_n.
   (a) Montrer que

$$\|U_N\|_2 = \min\{\|P\|_2 \mid P \in H_n\}.$$

   (b) En déduire qu'il existe un nombre réel μ tel que pour tout entier $0 \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}$, on a $\langle U_N, P_{2j} \rangle = \mu$. (On pourra considérer des polynômes $P \in H_n$ de la forme $U_N + t(P_{2j} - P_{2k})$ avec $t \in \mathbb{R}$.)
   (c) Exprimer U_N dans la base des P_{2j}. En déduire que

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{g_{2j}}.$$

   (d) Établir dans ce cas la formule

$$a_N = \left(\sum_{0 \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{g_{2j}} \right)^{-1}.$$

15. On suppose maintenant que U_N est impair. Exprimer encore a_N en fonction des g_ℓ.
16. Discuter, en fonction de la parité de n, la valeur de a_N. On en donnera la valeur explicite.
17. Donner la formule explicite de R_N, en fonction des polynômes P_j.

(*) Dans la deuxième partie on montre que R_N est scindé et que toutes ses racines sont dans $[-1, 1]$.