Exercice 6 :

VI.1

1) $\forall t \in \mathbb{R}$ $|\exp(itZ_\lambda)| \leq 1$ donc $\exp(itZ_\lambda)$ admet une espérance finie

$$E(\exp(itZ_\lambda)) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{it\frac{(n-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\lambda^n}{n!}$$ (Formule de transfert)

$$= e^{-\lambda - it\sqrt{\lambda}} e^{\lambda e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}}$$

$$= e^{-\lambda - it\sqrt{\lambda} + \lambda\left(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{2\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)}$$

$$E(\exp(itZ_\lambda)) = e^{-\frac{t^2}{2} + o(1)}$$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} E(\exp(itZ_\lambda)) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $t \mapsto a(t)\exp(itx)$ est continue

et $\underline{\forall t \in \mathbb{R} \ |a(t)\exp(itx)| \leq |a(t)|}$ (D)

et a est intégrable.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $t \mapsto a(t)\exp(itx)$ est intégrable

et **f est définie sur $\mathbb{R}$.**

(De plus puisque $x \mapsto a(t)\exp(itx)$ est continue, l'hypothèse de domination (D) permet même d'affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}$)

$\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|\,dt$,

donc $f(Z_\lambda)$ est bornée, elle admet donc une espérance.

VI.2

- $E(f(Z_\lambda)) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \exp\left(it \frac{n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \frac{\lambda^n}{n!}}_{u_n(t)} dt \Big)$

* chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|u_n(t)| \leq |a(t)| \frac{\lambda^n}{n!}$

* et $\sum_{n\geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(t)| \, dt$ converge car $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(t)| dt \leq \frac{\lambda^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)| dt$

et $\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)| dt$ converge.

On déduit de ces deux points que

$$E(f(Z_\lambda)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} a(t) \exp\left(it \frac{n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \frac{\lambda^n}{n!} \right) dt$$

$$E(f(Z_\lambda)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{a(t) \, e^{-\lambda(1+i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}) + e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}}}_{f_\lambda(t)} dt$$

$|f_\lambda(t)| \leq |a(t)| \cdot \exp\left(\mathrm{Re}\left(-\lambda + it\sqrt{\lambda} + \lambda e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}\right)\right)$

$|f_\lambda(t)| = |a(t)| \exp \underbrace{-\lambda + \lambda \cos \frac{t}{\sqrt{\lambda}}}_{\leq 0} \leq |a(t)|$

et a est intégrable

On peut appliquer le théorème de convergence dominée généralisé.

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} E(f(Z_\lambda)) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt.}$$

3) En admettant le résultat donné

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E(f(Z_\lambda)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + i u t} \, du \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{iUt} e^{-\frac{U^2}{2}} dU \right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{iUt} e^{-\frac{U^2}{2}} dt \right) dU$$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} E(f(Z_\lambda)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} dU}$$

4) En admettant que par encadrement par deux bonnes suites de fonctions on peut peut étendre le résultat à une fonction $\mathbb{1}_{[a,b]}$

On obtient

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \mathbb{P}(a \leq Z_\lambda \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{U^2}{2}} dU}$$

Prenons une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires ~~suivan~~ indépendantes suivant des loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

Or a vu que $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$. (Exercice I). S_n est d'espérance $m = n.1$

On a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \frac{X_1 + \dots + X_n - (n.1)}{\sqrt{n}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{U^2}{2}} dU.$$

On retrouve le théorème central limite démontré dans l'exercice. V pour une suite de variables suivant une loi de Bernoulli.