Exercice III

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$E(X \cdot \mathbb{1}_{X \geqslant \lambda E(X)})^2 \leqslant E(X^2)\, E(\mathbb{1}_{X \geqslant \lambda E(X)})$$

$$\underline{E(X \cdot \mathbb{1}_{X \geqslant \lambda E(X)})^2 \leqslant E(X^2)\, \mathbb{P}(X \geqslant \lambda E(X))} \qquad (1)$$

(Même si ce n'était pas clairement stipulé par l'énoncé, on a supposé $E(X^2) < +\infty$ (et par conséquent $E(X) < +\infty$)).

$$E(X) = E(X \cdot \mathbb{1}_{X \geqslant \lambda E(X)} + X \cdot \mathbb{1}_{X < \lambda E(X)})$$

$$= E(X \cdot \mathbb{1}_{X \geqslant \lambda E(X)}) + E(X \cdot \mathbb{1}_{X < \lambda E(X)})$$

$$\leqslant E(X \cdot \mathbb{1}_{X \geqslant \lambda E(X)}) + E(\lambda X) \qquad (\text{car } X \geqslant 0 \text{ et } E \text{ croissante.}$$

$$E(X) \leqslant E(X \cdot \mathbb{1}_{X \geqslant \lambda E(X)}) + \lambda E(X)$$

$$E(X \cdot \mathbb{1}_{X \geqslant \lambda E(X)}) \geqslant (1-\lambda) E(X) \geqslant 0 \qquad (\text{car } X \geqslant 0 \text{ et } \lambda \in [0,1])$$

On peut élever au carré.

$$\underline{E(X \cdot \mathbb{1}_{X \geqslant \lambda E(X)})^2 \geqslant (1-\lambda)^2 (E(X))^2} \qquad (2)$$

En regroupant (1) et (2), on obtient l'inégalité de Paley-Zygmund

$$E(X^2)\, \mathbb{P}(X \geqslant \lambda E(X)) \geqslant (1-\lambda)^2 (E(X))^2$$

Or X n'est pas sûrement nulle, donc $E(X^2) > 0$ et

$$\underline{\mathbb{P}(X \geqslant \lambda E(X))) \geqslant \frac{(1-\lambda)^2 (E(X))^2}{E(X^2)}} \qquad (3)$$

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{k}}$, et $\Delta = \{\omega \in \Omega \ \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) \text{ existe}\}$

est contenu dans ~~contenant~~ l'ensemble $\underline{\Lambda = \{\omega \in \Omega \ \lim_{n\to+\infty} (|S_{2n}(\omega) - S_n(\omega)|) = 0\}}$.

Pour montrer que $\mathbb{P}(L)=0$, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(\Lambda)=0$, c'est à dire $\boxed{\mathbb{P}(\Omega-\Lambda)=\mathbb{P}(\bar{\Lambda})=1}$. III.2

c'est ce que nous allons faire.

—

Suivons l'indication de l'énoncé et posons $X_n=(S_{2n}-S_n)^2$

$$X_n=\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{k}}\right)^2=\sum_{i,j=n+1}^{2n}\frac{\varepsilon_i\varepsilon_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}}$$

$$X_n^2=\sum_{i,j,k,l=n+1}^{2n}\frac{\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_l}{\sqrt{i}\sqrt{j}\sqrt{k}\sqrt{l}}$$

—

Si $i\neq j$ $\quad E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j)=0$ (car ε_i et ε_j sont indépendantes)

de même si $i\notin\{j,k,l\}$ (ou $j\notin\{i,k,l\}$, ou ....)

$$E(\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_l)=0$$

Il en résulte (linéarité de E)

$$E(X_n)=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{E(\varepsilon_k^2)}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

$$E(X_n^2)=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{E(\varepsilon_k^4)}{k^2}+\sum_{i,j=n+1}^{2n}\frac{E(\varepsilon_i^2)E(\varepsilon_j^2)}{i\,j}$$

Puis

$$\boxed{\frac{1}{2}\leq n\times\frac{1}{2n}\leq E(X_n)\leq n\times\frac{1}{n+1}\leq 1}\qquad(4)$$

et

$$\boxed{E(X_n^2)\leq n\times\frac{1}{(n+1)^2}+n^2\times\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n}{n+1}\leq 1}\qquad(5)$$

En choisissant $\lambda = \frac{1}{4}$, il résulte de (3), (4) et (5) que : III.3

$$\mathbb{P}\left(|S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X_n \geq \frac{1}{4}\right)$$

$$\geq \mathbb{P}\left(X_n \geq \frac{1}{2} E(X_n)\right)$$

$$\geq \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(|S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2}\right) \geq \frac{9}{64} \geq \frac{1}{8}} \qquad (6)$$

Soit (Ω_n) l'événement $|S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2}$

Les (Ω_{2^n}) sont mutuellement indépendants (théorème des coalitions).

Soit $B_p = \bigcup_{n \geq p} \Omega_{2^n}$

$\overline{B_p} = \bigcap_{n \geq p} \overline{\Omega_{2^n}}$

$\forall q \in \mathbb{N} \quad \overline{B_p} \subset \bigcap_{p \leq n \leq p+q} \overline{\Omega_{2^n}}$, donc

$$\mathbb{P}(\overline{B_p}) \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{p+1}.$$

Par conséquent $\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \; \mathbb{P}(\overline{B_p}) = 0}$ (7)

puis $\mathbb{P}\left(\bigcup_{p=0}^{+\infty} \overline{B_p}\right) = 0$ (réunion dénombrable d'événements de probabilité nulle)

soit $\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=0}^{+\infty} B_p\right) = 1$ et finalement

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\{\omega, \forall n \; \exists m \geq n. \; |S_{2^{m+1}} - S_{2^m}| \geq \tfrac{1}{2}\}\right) = 1} \qquad (8)$$

Par inclusion $\boxed{\mathbb{P}(\Omega - \Lambda) = 1}$

q.e.d