Exercice II)

1) $X+Y$ et $X+Z$ peuvent suivre la même loi sans que Y et Z ne suivent la même loi.

	$X=0$	$X=1$	
$Y=0$	1/6	1/6	1/3
$Y=1$	1/6	1/6	1/3
$Y=2$	1/6	1/6	1/3
	1/2	1/2	

$\neq$

	$X=0$	$X=1$	
5/12	1/6	1/4	$Z=0$
1/6	1/12	1/12	$Z=1$
5/12	1/4	1/6	$Z=2$
	1/2	1/2	

2) Si X et Y et Z sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ $\quad G_{X+Z} = G_X G_Z$.

Donc $X+Y \sim X+Z \Rightarrow G_X G_Y = G_X G_Z$

$\Rightarrow \forall t \in]0,1] \quad G_Y(t) = G_Z(t)$ (car $G_X(t) > 0$)

$\Rightarrow \forall t \in [0,1] \quad G_Y(t) = G_Z(t)$ (car G_Y et G_Z sont continues.)

$\Rightarrow G_Y = G_Z$

$X+Y \sim X+Z \Rightarrow Y \sim Z$

On remarquera que l'indépendance de X et Y et celle de X et Z suffisent

3) On procède comme dans la question précédente, en remplaçant la fonction génératrice par la transformation de Laplace. $L_X : t \mapsto E(e^{-tX})$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$ si X est bornée, de classe C^∞ et caractérise la loi de X (non trivial, voir l'exercice 4).

De plus $\forall t \; L_X(t) \neq 0$ et $L_{X+Y}(t) = E(e^{-tX} e^{-tY}) = L_X(t) L_Y(t)$ si X et Y sont indépendantes.

On termine alors comme dans la question précédente.

$X+Y \sim X+Z \Rightarrow L_{X+Y} = L_{X+Z} \Rightarrow L_Y = L_Z \Rightarrow Y \sim Z$

4) ??

La réponse est non.