Exercice I

I.1

$(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda>0)$.

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Soit G_X la ~~variable aléatoire~~ fonction génératrice de la variable aléatoire X.

Puisque les X_i sont indépendantes, on a :

$$G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t) \times \quad \times G_{X_n}(t) = (G_{X_1})^n = (e^{\lambda(t-1)})^n = e^{n\lambda(t-1)}$$

S_n suit donc une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$

$$\boxed{S_n \rightsquigarrow \mathcal{P}(n\lambda)}$$

1) Soit $\varepsilon>0$.

$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{tS_n}>0$

et $\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad S_n > n(\lambda+\varepsilon) \Leftrightarrow e^{tS_n} > e^{nt(\lambda+\varepsilon)}$

$$\mathbb{P}(S_n > n(\lambda+\varepsilon)) = \mathbb{P}\left(e^{tS_n} > e^{nt(\lambda+\varepsilon)}\right)$$

Or d'après l'inégalité de Markov, on a :

$$\mathbb{P}\left(e^{tS_n} > e^{nt(\lambda+\varepsilon)}\right) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{nt(\lambda+\varepsilon)}} = \frac{e^{-n\lambda}\sum_{p=0}^{+\infty} e^{tp}\frac{(n\lambda)^p}{p!}}{e^{nt(\lambda+\varepsilon)}}$$

$$\mathbb{P}\left(e^{tS_n} > e^{nt(\lambda+\varepsilon)}\right) \leq \left[e^{\lambda(e^t-1)-(\lambda+\varepsilon)t}\right]^n = \left(e^{\varphi_\lambda(t)}\right)^n$$

Or $\varphi_\lambda(0)=0$ et $\varphi_\lambda'(0) = -\varepsilon<0$. donc il existe $t>0$ tel que $\varphi_\lambda(t)<0$ (le t optimal est $\ln(1+\frac{\varepsilon}{\lambda})$)

Choisissons un tel t, posons $c = -\varphi_\lambda(t)$, et $K=1$.

On alors $\quad \boxed{\mathbb{P}(S_n > n(\lambda+\varepsilon)) \leq K(e^{-c})^n = Ke^{-cn}}$

I.2

2) De la même manière, en remplaçant e^{tS_n} par e^{-tS_n}, t dans $\mathbb{R}^{*+}$, on obtient

$$\mathbb{P}(S_n < n(\lambda-\varepsilon)) = \mathbb{P}(e^{-tS_n} > e^{-nt(\lambda-\varepsilon)})$$ (car $x \to e^{-tx}$ est décroissante)

$$\mathbb{P}(S_n < n(\lambda-\varepsilon)) \leq \frac{E(e^{-tS_n})}{e^{-nt(\lambda-\varepsilon)}} = (e^{\psi_\lambda(t)})^n$$ avec

$$\psi_\lambda(t) = \lambda(e^{-t}-1) + t(\lambda-\varepsilon)$$

une nouvelle fois $\psi_\lambda(0)=0$ $\psi_\lambda'(0) = -\varepsilon < 0$, donc il existe $t>0$ $\psi_\lambda(t)<0$, posons $c_1 = -\psi_\lambda(t)$ (le t optimal est ici $-\ln(1-\frac{\varepsilon}{\lambda})$ (ou 1 si $\varepsilon \geq \lambda$)).

On choisit $K_1 = 1$ et $\mathbb{P}(S_n < n(\lambda-\varepsilon)) \leq (e^{-c_1})^n$.

Finalement, en choisissant $K=2$ et $c_2 = \min(c, c_1)$ on aura $\mathbb{P}(|S_n - n\lambda| > \varepsilon) \leq K(e^{-c_2})^n$.

3) Soit $\varepsilon > 0$ $A_n = \bigcup_{m \geq n} \left(\left|\frac{S_m}{m} - \lambda\right| > \varepsilon\right)$

Alors $A_{n+1} \subset A_n$ et $\mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_m}{m} - \lambda\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{K(e^{-c_2})^n}{1-c_2}$.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{K(e^{-c_2})^n}{1-c_2}$ et $(A_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Le théorème de continuité décroissante permet d'affirmer. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = 0$

c'est-à-dire $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n}\right) = 1$, soit

$$\mathbb{P}\left(\left(\exists n.\ \forall m \geq n\ \left|\frac{S_m}{m} - \lambda\right| \leq \varepsilon\right)\right) = 1$$

On pose alors $B_p = \left(\exists n\ \forall m \geq n\ \left|\frac{S_m}{m} - \lambda\right| \leq \frac{1}{2^p}\right)$ pour p dans $\mathbb{N}$

On a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{p \in \mathbb{N}} B_p\right) = 1$. (car $\mathbb{P}(\overline{B_p}) = 0$ donc $\mathbb{P}(\bigcup_p \overline{B_p}) = 0$ donc $\mathbb{P}(\bigcap_p B_p) = 0$).

ce qui se traduit par $\mathbb{P}(B) = 1$ ou $B = \{\omega,\ \forall p\ \exists n\ \forall m \geq n\ \left|\frac{S_m}{m} - \lambda\right| \leq \frac{1}{2^p}\}$

$B = \{\omega,\ \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = \lambda\}$