Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1: Ecrire la différentielle de $\arctan(\frac{xy}{z^2})$.

Exercice 2: Quelle est la différentielle de l'application, définie sur l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, qui à X associe ${}^tXX$.
Indication : Choisir par exemple la norme $\|M\| = \sup |m_{i,j}|$. Développer $f(M_0+H)$, directement, conserver une partie visiblement linéaire en H et montrer que le reliquat est négligeable devant $\|H\|$ en majorant la norme d'un produit.

Exercice 3: Etudier la différentiabilité sur $\mathbb{R}^n$ de

$$N_\infty(x) = \sup_i |x_i|.$$

Exercice 4: Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ne s'annule pas et qu'il existe une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I telle que $\forall x \in I \quad f(x,\phi(x)) = 0$. Déterminer, à l'aide des dérivées partielles de f et g en $(x,\phi(x))$, la dérivée de $\psi : x \mapsto (g(x,\phi(x))$.

Exercice 5: Trouver toutes les applications f de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ telles que

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left[f(x^2+y^2+z^2)\right] = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}.$$

Exercice 6: Déterminer toutes les fonctions polynomiales de x et y qui vérifient :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 4f.$$

Exercice 7: Déterminer $f : (x,y) \mapsto \phi(\dfrac{x}{y})$ avec $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{x}{y^3}$.

Exercice 8: Calculer la dérivée première et seconde de $x \mapsto f(\alpha(x),\beta(x))$ en faisant des hypothèses naturelles sur f, α et β.

Exercice 9: On voudrait résoudre l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. On pose $f(x,y) = g(x-y,x+y)$. Déterminer l'équation équivalente vérifiée par g. En déduire la forme des solutions de l'équation.

Exercice 10: Déterminer ϕ pour que l'application $(x,y) \mapsto \phi\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$ ait un laplacien nul.

Exercice 11:
1) Soit α un réel et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n - \{(0,\dots,O)\}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}^{*+} \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Montrer que

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0,\dots,0)\} \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = \alpha\, f(x_1,\dots,x_n).$$

(Cette relation est connue sous le nom de relation d'Euler.)
2) Etablir la réciproque.

Exercice 12: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 13: Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. On définit :

$$F(x, y) = \int_0^x \left(\int_0^y f(u, v)\, dv \right) du.$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14: Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ en fonction de x et $y = f(x)$ sachant que $y^x = x^y$.

Exercice 15: On voudrait résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On pose $f(x, y) = g(x - y, x + y)$. Déterminer l'équation équivalente vérifiée par g. En déduire la forme des solutions de l'équation.

Exercice 16: Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série absolument convergente de nombre complexes.
1) Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17: Soit f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des applications $(f_1, \ldots, f_n)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$f(x) = f(0) + x_1 f_1(x) + \cdots + x_n f_n(x).$$

On considère maintenant la fonction

$$F : (x, t) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)\ e^{-n^2 t}.$$

1) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$ et vérifie sur ce domaine l'équation (dite équation de la chaleur) :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, t).$$

Exercice 18: On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle qu'en tout point sa différentielle soit un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$.
1) Montrer que cette différentielle est constante.
2) En déduire que f est une isométrie.

Exercice 19: Trouver les extremums de $\sum_{k=1}^n p_i \ln(p_i)$ sachant que les p_i sont dans $[0, 1]$ et vérifient $p_1 + \cdots + p_n = 1$. On prolonge $x \mapsto x \ln(x)$ par continuité en 0.
Indication : Commencer par étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 20: Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y^2 > 0$. Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$sur U telles que

$$2(y^2 - x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = y^2 - x.$$

On effectuera le changement de variable $(x,y) = (u^2 + v^2, u + v)$.

Exercice 21: On rappelle qu'une application f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si : elle admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable et chacune de ces dérivées partielles est continue sur U. On suppose maintenant que U est un produit d'intervalles (cette hypothèse doit vous servir). Soit f une fonction continue sur U admettant une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable continue sur U. On voudrait montrer que

$$F : (x,y) \mapsto \int_a^x f(t,y)\,dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U et déterminer ses dérivées partielles.
1) Montrer que F est bien définie
2) Montrer que F est continue sur U.
Indication : Faire un changement de variable pour se ramener à l'intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle fixe. Appliquer le théorème classique.
3) Montrer que F admet une dérivée partielle par rapport à la première variable, continue sur U.
4) En argumentant avec précision (c'est à-dire en explicitant bien les fonctions auxquelles vous appliquez des théorèmes, tant par leur procédé de calcul que leurs espaces d'arrivée et de départ)montrer que F admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable continue sur U.

Exercice 22: On considère une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, avec $f(x,y) = (x+y, xy)$.
1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa matrice jacobienne.
2) Caractériser l'image $f(\mathbb{R}^2)$.
3) On pose $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > y\}$. Montrer que la restriction de f à A est une bijection, puis qu'il s'agit d'un difféomorphisme. Exprimer alors la matrice jacobienne de l'application réciproque.

Exercice 23: Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ et u un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ pour sa structure euclidienne usuelle. Montrer que

$$\Delta(f \circ u) = (\Delta f) \circ u$$

où Δg est le laplacien de g, c'est-à-dire

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_1} + \cdots + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_n}\,.$$

Exercice 24: Extremums, sur $\mathbb{R}^2$, de la fonction $\sin x + \sin y + \cos(x+y)$.

Exercice 25:
1) Extremum de $x\ln x + y\ln y + z\ln z$ sur le domaine $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}+^3; x+y+z = 1\}$.
2) Les u_i etant des réels strictement positifs, déterminer les extremums de

$$\sum p_i u_i - \sum p_i \ln p_i$$

sur $\{(p_1,\ldots,p_n); p_i \geq 0, \sum p_i = 1$.

Exercice 26: Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,0) = 0$. Montrer qu'il existe g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = yg(x,y).$$